物理学2

No. 4
エネルギー保存則

力学的エネルギー

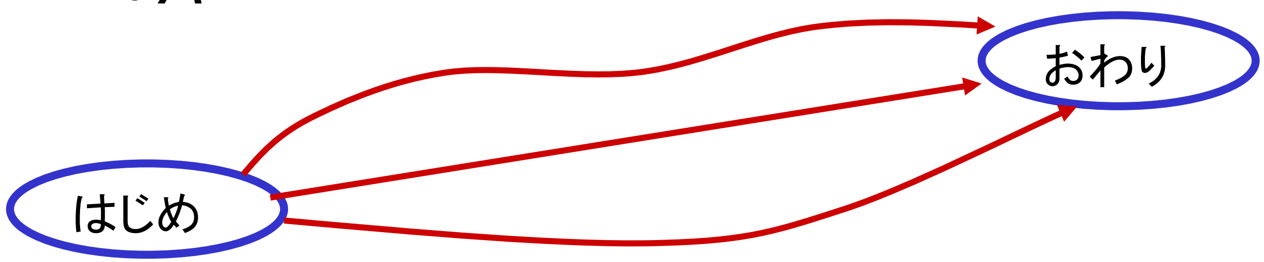
前回，仕事の一般的な定義を与えた。
これから，力学的なエネルギーを導入する。

- ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）　U
- 運動エネルギー　K

保存力，前回の復習

仕事
（前回）

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$



- 一般に仕事の大きさは「経路」に依存
- 仕事の大きさが経路によらず，始点と終点を与えると決まる → 保存力

→ ポテンシャルエネルギー

ポテンシャルエネルギー

１次元運動

関数 U(x) を次式で定義

$$\boxed{U(x) = -\int F(x)dx}$$

注：U(x)は定数だけの不定性あり

$\boxed{\text{仕事}}$ ＝ $\boxed{\text{始点の U}}$ － $\boxed{\text{終点の U}}$

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F(x)dx = \left[-U(x)\right]_{x_a}^{x_b}$$

$$= U(x_a) - U(x_b)$$

関数 U(x) は
エネルギー

ポテンシャルエネルギー:例

$$U(x) = -\int F(x)dx$$

重力:x 軸上向き $F = -mg \quad \Rightarrow \quad U = mgx$

復元力
（次回） $F = -kx \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}kx^2$

いずれも x＝0で U＝0を仮定

ポテンシャルエネルギー，3次元

$$U(\vec{r}_A) = -\int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

点Oを基準とした点A
のエネルギー

微分形の表現

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U$$

付録A．９参照

∂ ・・・偏微分記号,教科書1.5.2節(p.14)をみよ

前回の例題の力の検討

$$\vec{F} = (2x - y, -x + 2y)$$

$$U = -x^2 + xy - y^2$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

O(0,0)　$U(O) = 0$

A(4,0)　$U(A) = -4^2 = -16$

C(4,2)　$U(C) = -4^2 + 4 \times 2 - 2^2 = -12$

前回の結果

$$\left\{\begin{aligned} &W(O \to A) = U(O) - U(A) = 16 \\ &W(A \to C) = U(A) - U(C) = -4 \\ &W(O \to C) = U(O) - U(C) = 12 \end{aligned}\right.$$

運動エネルギー

動いている質点の持つエネルギー

$$W=\int_{x_a}^{x_b}F(x)dx \qquad \boxed{\Leftarrow \quad F=ma}$$

計算はp.56〜p.57

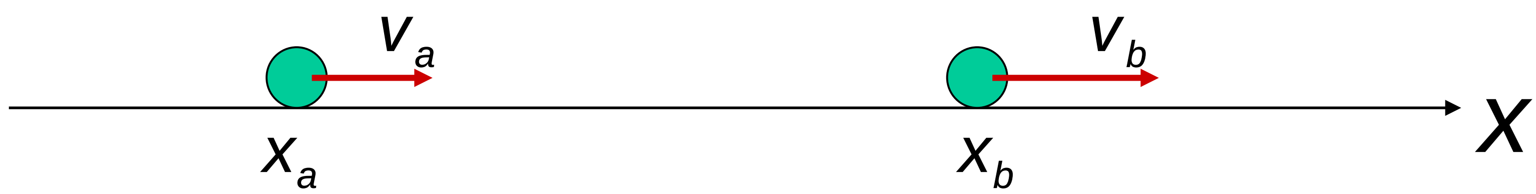
$$W=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2$$

運動エネルギー

エネルギー保存則

いままでの結果から. . .



$$W = U(x_a) - U(x_b) \quad \Leftrightarrow \quad W = \tfrac{1}{2} m v_b^2 - \tfrac{1}{2} m v_a^2$$

$$K_a + U(x_a) \quad = \quad K_b + U(x_b)$$

始めのエネルギー　　　　終わりのエネルギー

エネルギー保存則

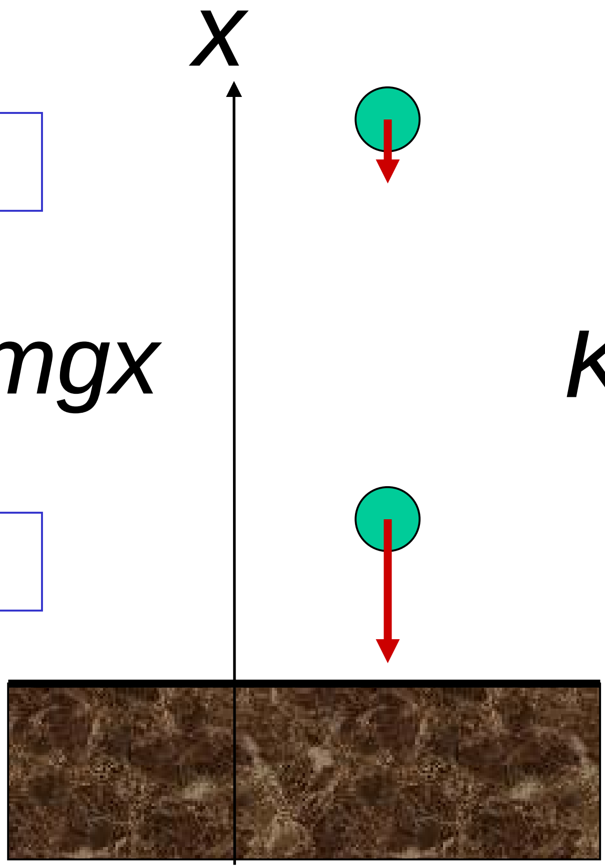
$$\boxed{K + U = (\text{一定})}$$

エネルギー保存則の例：例題３．２

U 大きい

K小さい

$$U = mgx$$



$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

U 小さい

K大きい

落下：**位置エネルギーが運動エネルギーに変換されるプロセス**

等加速度運動の式より

$$v = -gt + v_0$$

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

これをK，Uに
代入する

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(-gt + v_0\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m(\cancel{g^2t^2} - \cancel{2gtv_0} + v_0^2)$$

K，Uは個々
には変化
t に依存

$$U = mgx = mg\left(-\cancel{\frac{1}{2}gt^2} + \cancel{v_0 t} + x_0\right)$$

合計する

$$K + U = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgx_0$$

$\boxed{\text{K＋U は 一定に 保たれる}}$

エネルギー保存則と運動

（教科書3.2.3節）

$$\boxed{K + U = E}$$

E　全エネルギー，定数

K　運動エネルギー，負にならない

運動が実現する範囲

$$\boxed{U \leq E}$$

例題

x 軸上を運動する質量m の質点に力$F=-kx+hx^2$ が働いている。質点は位置 $x=0$ で速度 V を持っている（k, h, V は正の定数。）。

（１）この力を表すポテンシャルエネルギーを答えよ。ただし $x=0$ で $U=0$ となるものとする。

（２） 関数 $U(x)$ が極大となる位置を $x=a$ とする。 a と $U(a)$ を答えよ。

（３） 関数 $U(x)$ のグラフの概形を描け。

（４） 運動範囲が有限であるためのV の上限を答えよ。