

物理学1

No. 3 位置, 速度, 加速度

微分と積分

- 微分・積分は理工系学生の九九です！
- 微分，積分の簡単な計算（高校レベル）はできると仮定します。
→あてはまらない学生は，学習支援センターを活用しなさい！

例題(1)

以下の関数を，変数 t で微分あるいは積分せよ。(導関数を求める。不定積分を求める。)

$$t^n \quad \sin t \quad \cos t$$

$$e^t \quad \log t$$

注意

「文字」は意味がない。「公式」はすべて同じ。
数学での x の微分・積分公式はあらゆる文字
に使える。

数学では, y の微分を y' と略す。しかし x を
時間 t で微分したものを x' と書くのは駄目。

$$\frac{dx}{dt} \quad \text{あるいは} \quad \dot{x}$$

「係数」の扱い

$f(at)$

 を t で微分する。→ a をかける
 を t で積分する。→ a で割る


例) $x = (7t + 2)^4$

 $\frac{dx}{dt} = 7 \times 4(7t + 2)^3$
 $\int x dt = \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} (7t + 2)^5$

定積分

$$\int f(t)dt \quad \int_a^b f(t)dt \quad \text{違いを理解すること}$$

$$\int f(t)dt = F(t) + C$$

 同じもの

積分した「結果」(原始関数)を
求める。積分定数がつく。
求めた結果は関数である。

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

上端と下端を代入して引き算
する。求めた結果は数である。

以上で数学の復習おわり

位置, 速度, 加速度

x 位置

v 速度

a 加速度

微分の考え方 (教科書1.5節)

- 物理的な関係式になぜ「微分」が現れるか？
⇒ **それは必然！**
- 「速度」を例として説明

質点の位置の記述 (前回の確認)

ものが動く  時間的に座標が変化
(日常語)

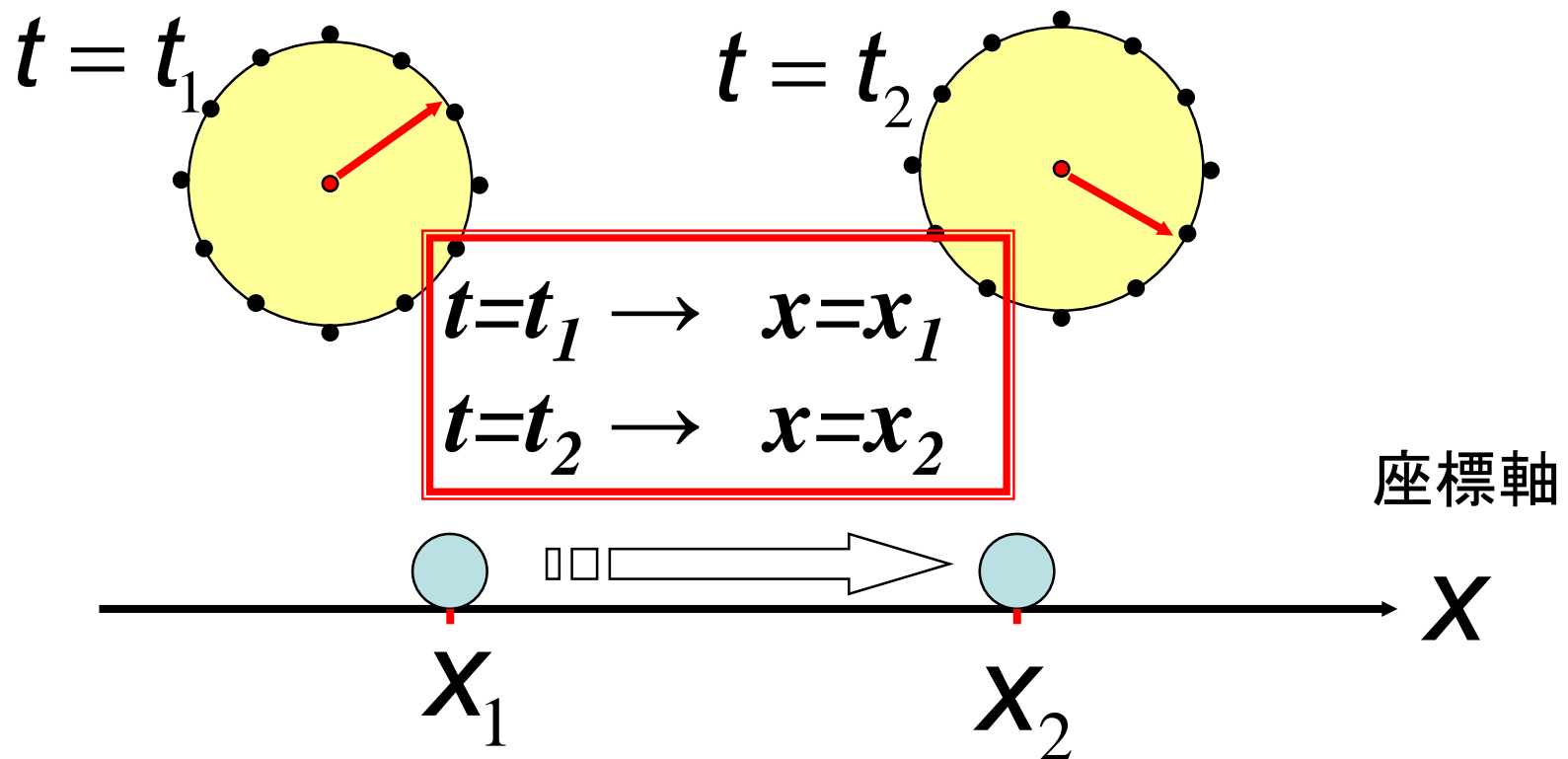
 座標が時間の関数

$$x = x(t)$$

高校数学: $y = f(x)$

速度

- 位置の観測



速度

$$\text{速度} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}$$

$$\begin{aligned} t=t_1 &\rightarrow x=x_1 \\ t=t_2 &\rightarrow x=x_2 \end{aligned}$$

$$V = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$$

$$V = \frac{X(t_2) - X(t_1)}{t_2 - t_1}$$

このような定義は速度が一定のときのみ有効

一般の速度

速度が一定でない。 $v(t)$

瞬間的な速度を考える t_1 と t_2 の時間間隔を小さくする

$$v = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \begin{array}{l} t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t \\ t_1 \Rightarrow t \end{array} \quad v(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

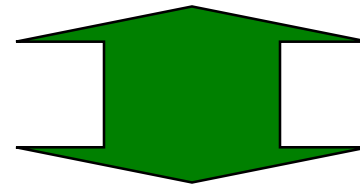
$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

速度を微分で表現

結論

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$



同じ

高校数学：
微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

加速度

$$\text{加速度} = \frac{\text{速度変化}}{\text{時間}}$$

$$t=t_1 \rightarrow v=v_1$$

$$t=t_2 \rightarrow v=v_2$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \end{aligned}$$

例題(2)

x軸上を運動している質点の位置が次式で与えられている。速度と加速度を求めよ。

$$x = A \cos \omega t$$

積分の考え方 (教科書1.6節)

$$\text{速度} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}$$

$$v = \frac{x}{t}$$

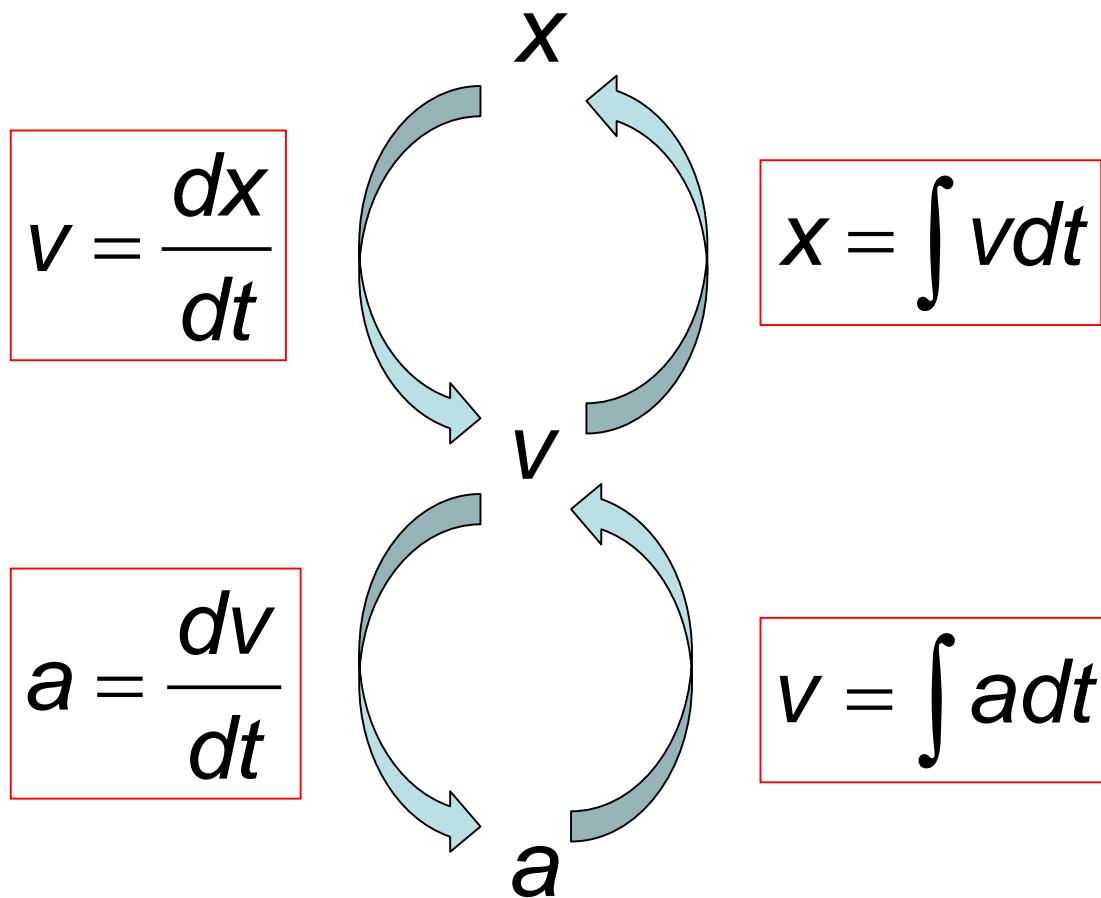
$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\text{距離} = \text{速度} \times \text{時間}$$

$$x = vt$$

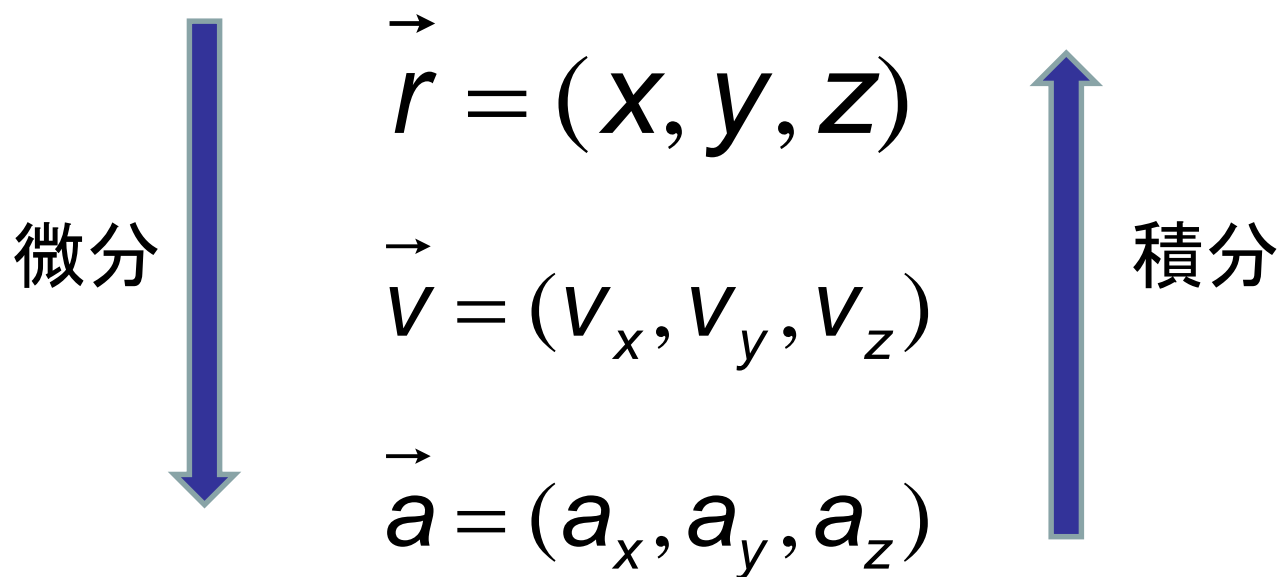
$$x = \int v dt$$

運動の記述：位置，速度，加速度



2次元, 3次元

- ベクトルで表示
- 成分ごとに, 微分・積分する



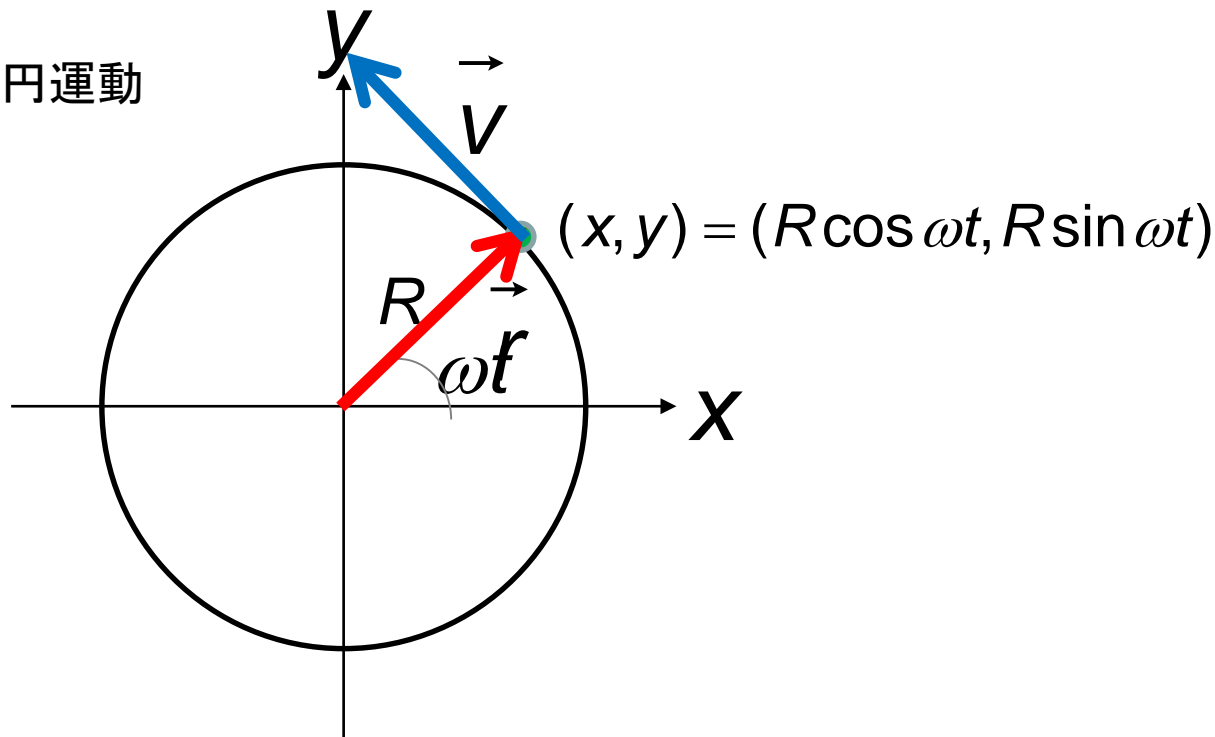
例題(3)

平面上を運動している質点の位置ベクトルが以下の式で与えられている。

- (1) この運動はどのようなものか
- (2) 位置ベクトルと速度ベクトルが直交していることを示せ。

$$\vec{r} = (x, y) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)$$

(1) 半径 R の円運動



$$(2) \quad \vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t)$$

垂直である = ベクトルの内積が0

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{v} &= x v_x + y v_y \\ &= R \cos \omega t \times (-R\omega \sin \omega t) + R \sin \omega t \times R\omega \cos \omega t \\ &= 0 \end{aligned}$$

位置, 速度, 加速度

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

初期条件 → 積分定数の決定

$$x = \int v dt$$

$$v = \int a dt$$

例題(4)

速度が式 $v(t)=t+1$ で与えられている x 軸上の物体の運動がある。

この物体は $t=2$ のとき $x=5$ にあった。

このとき物体の位置 $x(t)$ を表す式を答えよ。

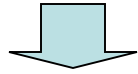
教科書例題1.5 (p.15)

例題 1.5

$$v = t + 1$$

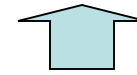


$$x = ?$$

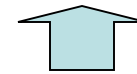


$$x = \int v dt$$

$$x = \frac{1}{2}t^2 + t + 1$$



$$C = 1$$



積分公式

$$x = \frac{1}{2}t^2 + t + C$$

$$5 = \frac{1}{2}2^2 + 2 + C$$

初期条件

$$t = 2 \quad x = 5$$