

物理学1

No. 5

速度に依存する加速度

速度に依存する加速度

Newtonの運動方程式

$$F = ma$$

力が速度により与えられる場合

具体的な事例：流体中を運動する物体に対する抵抗力，
磁場中を運動する電荷に対する力，...

(教科書 2. 5. 3節, p.31~)

加速度 $a = f(v)$

速度に依存する加速度

$$a = f(v)$$



a, v は変数。式が1つで2変数。このままでは解けない。



$$\frac{dv}{dt} = f(v)$$

変数分離形の
微分方程式



変数が1つなので解ける(はず)

$$\frac{dv}{dt} = f(v)$$

方法(1)

分数として変形
(ホントは嘘)



$$\frac{dv}{f(v)} = dt$$



$$\int \frac{dv}{f(v)} = \int dt$$

方法(2)

$$\frac{1}{f(v)} \frac{dv}{dt} = 1$$

両辺を t で積分



$$\int \frac{1}{f(v)} \frac{dv}{dt} dt = \int dt$$

左辺を変数変換



あとは積分する

例題(1)

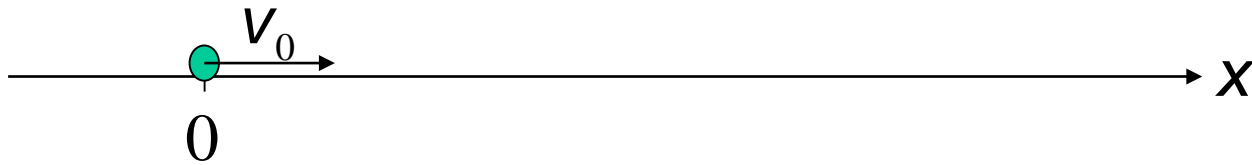
x軸上を運動する質点の加速度が $a = -kv$ であつたとする (k は正の定数)。

時刻 $t=0$ で質点の速度は $v=v_0$ (>0) , 位置は $x=0$ である。

- (1) この質点はどのような運動をするか, 定性的に考察せよ。
- (2) 速度と位置を求めよ。
- (3) 速度と位置の時間変化を表すグラフを描け

(1)この質点はどのような運動をするか、**定性的に**考察せよ。

$$a = -kv \quad (k > 0)$$

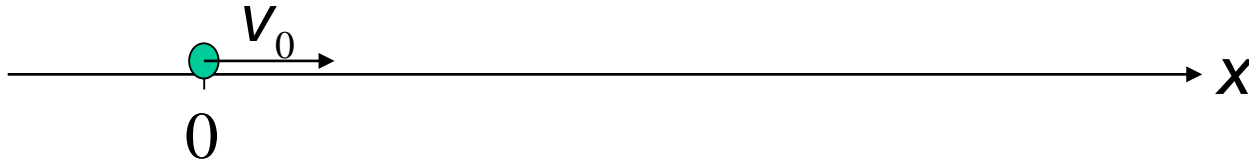


加速度が負である。よって、**だんだん遅くなる**。
速度が0になれば、加速度も0なので、**速度の変化はない**。

⇒ **だんだん、遅くなって、あるところで停止する**。

(2) 速度と位置を求めよ。

このあたり教科書p.32-33を参考に



$$a = -kv \quad (k > 0)$$

$$\frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = -k$$

$$\int \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} dt = \int (-k) dt$$

積分の変数変換 (t から v へ)

$$\int \frac{1}{v} dv = \int (-k) dt$$

積分する。対数関数となることに注意

$$\log |v| = -kt + C$$

積分定数は両辺に出るが、1つにまとめてよい。

今の場合、 v が負にならない。

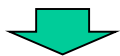
$$\log v = -kt + C$$

初期条件で積分定数を決める。



$$t = 0 \Rightarrow v = v_0$$

$$\log v_0 = -k \cdot 0 + C$$



$$\log v = -kt + \log v_0$$

対数の性質を使って式を変形する。
($v = \dots$ の形にしたい。)



$$\log v - \log v_0 = -kt$$

$$\log \frac{v}{v_0} = -kt$$

$$\frac{v}{v_0} = e^{-kt}$$

このあたり
の変形は今
後は省略す
るよ！



$$v = v_0 e^{-kt}$$

これが結論。次に、 x を求めるには、これを積分すればよい。

$$\begin{aligned} x &= \int v dt \\ &= \frac{v_0}{-k} e^{-kt} + C \end{aligned}$$

初期条件で積分定数を決める。



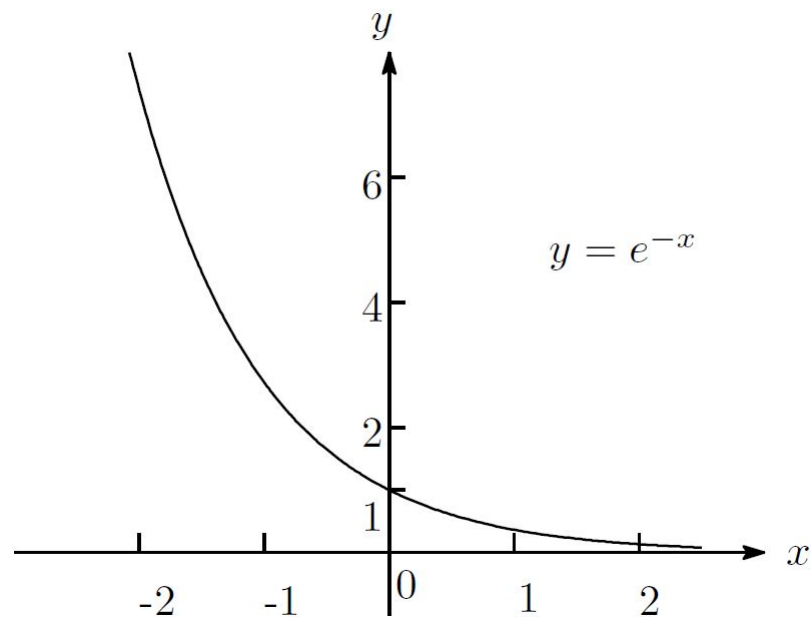
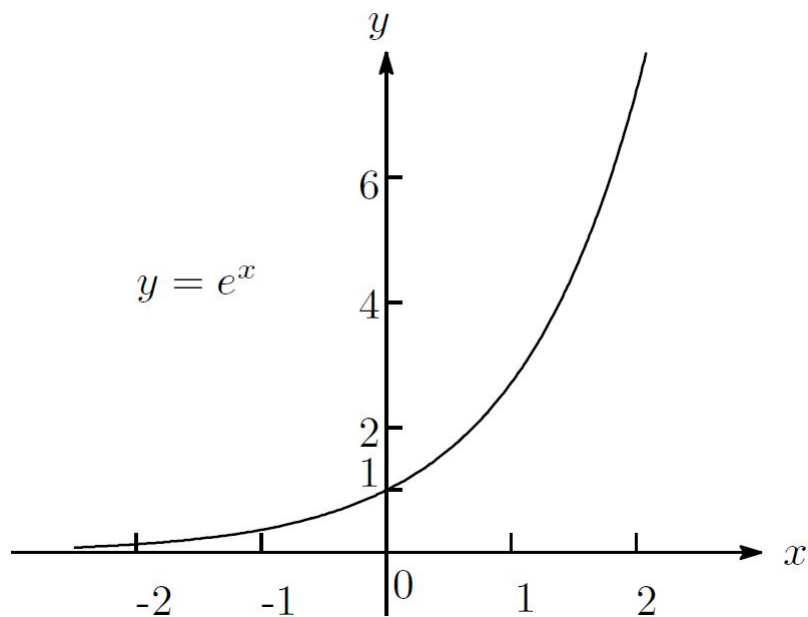
$$t = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$0 = -\frac{v_0}{k} \times 1 + C$$

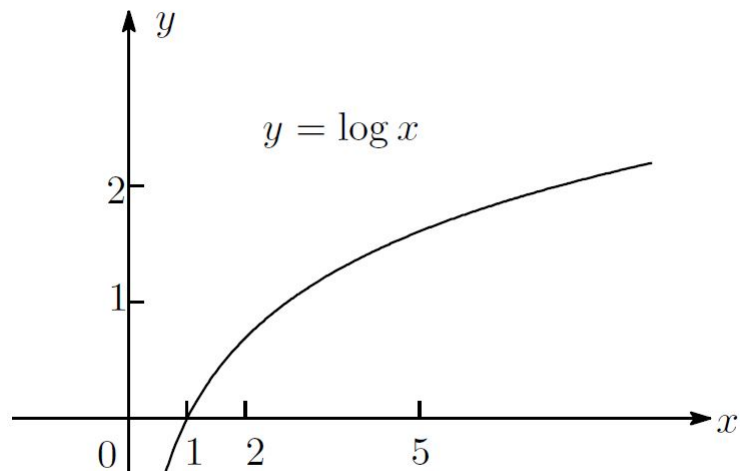


$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

(3) 速度と位置の時間変化を表すグラフを描け。



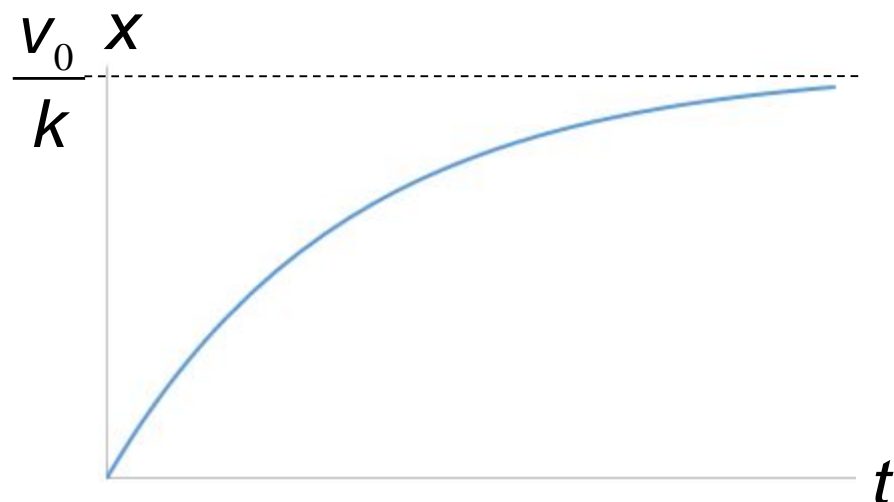
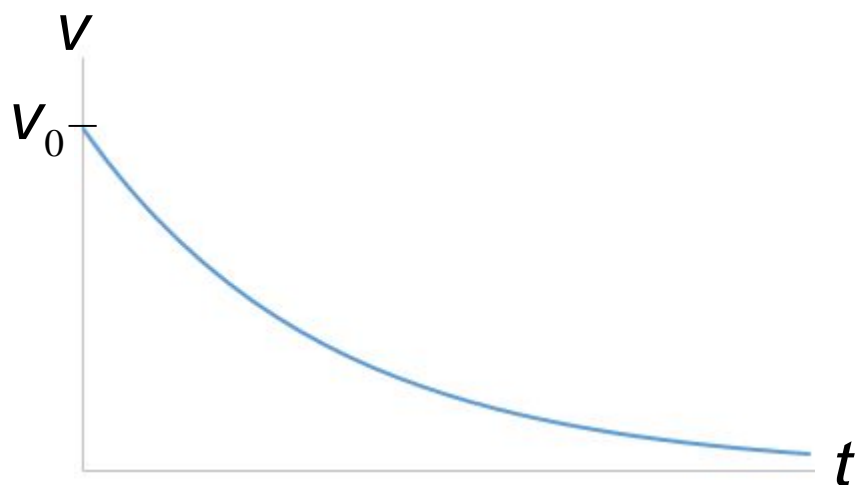
指数関数や対数関数の
グラフが描けますか。



(3) 速度と位置の時間変化を表すグラフを描け。

$$v = v_0 e^{-kt}$$

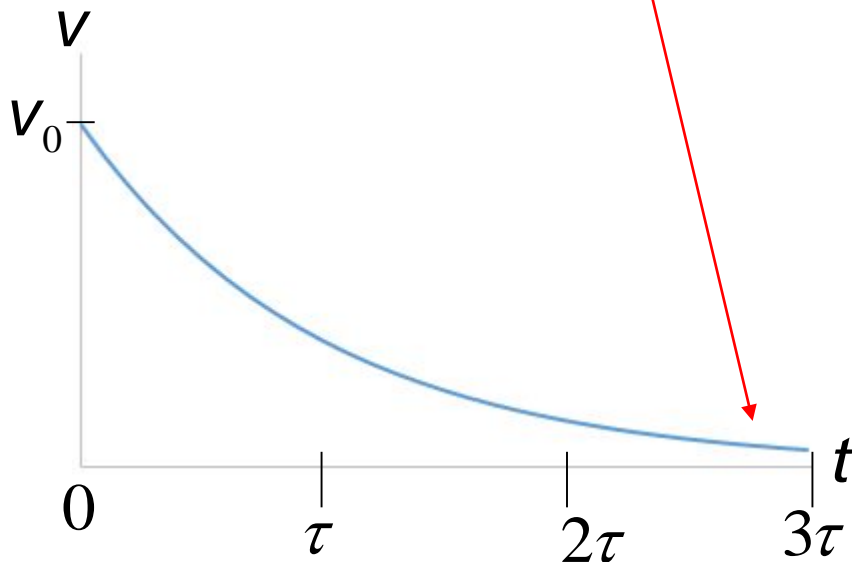
$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$



(1)で述べた「**だんだん、遅くなって、あるところで停止する。**」の理解

$$v = v_0 e^{-kt}$$

v=0 になるのは t=∞



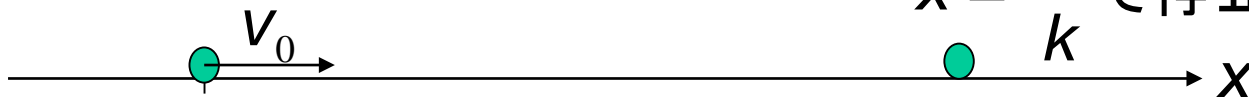
x	e^{-x}
0	1
1	0.367879
2	0.135335
3	0.049787
4	0.018316
5	0.006738
6	0.002479

指数関数の値は急激に変動する
⇒ 事実上0になったとみなせる。

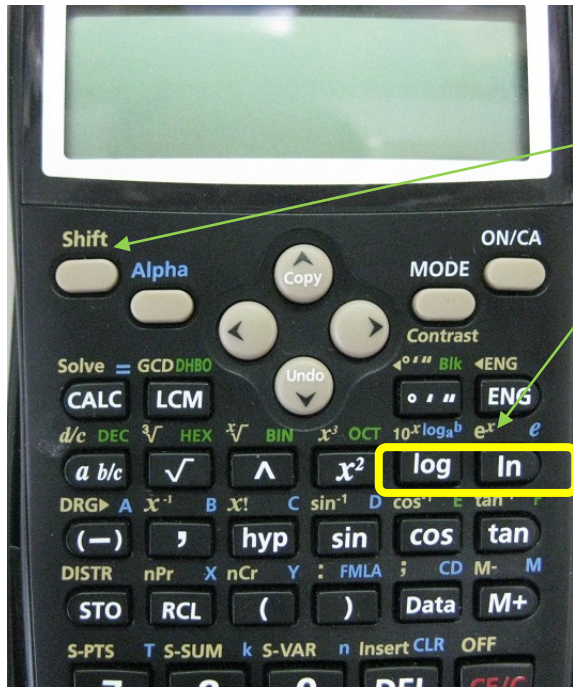
その目安

緩和時間 $\tau = \frac{1}{k}$
時定数

$x = \frac{v_0}{k}$ で停止する



電卓の扱い



指数関数

e^x
この電卓では[Shift]+[ln] で操作
取扱説明書！

注意: [log] と [ln]

log

常用対数 $y = \log_{10} x$

ln

自然対数 $y = \log_e x$

$$\log 2 = 0.3010 \quad \ln 2 = 0.693$$

値が違う

例題(2)

x軸上を運動する質点の加速度が
 $a = g - kv$ であったとする(g, k は正の定数)。
時刻 $t=0$ で質点の速度は $v=0$, 位置は
 $x=0$ である。

速度と位置を求めよ。

速度のグラフを描け。

このあたり教科書p.32-33を参考