物理学1

Ｎｏ．６
座標に依存する加速度

座標に依存する加速度

Newtonの運動方程式 $F = ma$

力が座標により与えられる場合
具体的な事例： 単振動，・・・

（教科書 ２．５．４節，p.34～）

加速度 $a = f(x)$

座標に依存する加速度

$$a = f(x)$$

↓

a, x は変数。式が1つで2変数。このままでは解けない。

↓

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$$

2階の
微分方程式

↓

変数が1つなので解ける（はず）

一般の場合にはなかなか難しい

$$f(x) = a + bx + c\frac{dx}{dt}$$

くらいの場合に限定して考える

$$x \quad \Rightarrow \quad x + (-a/b)$$

と置き換えれば定数項 a は消える

↓

線形の2階微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A\frac{dx}{dt} + Bx = 0$$

A,B は定数

指数関数(その1)

指数関数はとても素晴らしい関数

関数の中で，微分しても積分しても形が変わらないのは指数関数だけ！

$$(e^x)' = e^x \quad \int e^x dx = e^x$$

以下で次の性質を利用する

α は任意の定数

$$e^{\alpha t} \Rightarrow \frac{de^{\alpha t}}{dt} = \alpha e^{\alpha t} \Rightarrow \frac{d^2 e^{\alpha t}}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t} \Rightarrow$$

線形の2階微分方程式の解法

線形の2階微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+A\frac{dx}{dt}+Bx=0$$

A,B は定数

以下の方法は原理的に
N階の場合に使える

1）解の形を　$x=e^{\alpha t}$　と仮定する。α は解となるように
これから決める未知数である。

2）$x=e^{\alpha t}$ を代入すると次の特性方程式を得る。

$$\alpha^2+A\alpha+B=0$$

3）この解を　α_1,α_2　とする。（重解の場合は面倒なので略）

4）方程式の一般解は以下である。

$$x=C_1e^{\alpha_1 t}+C_2e^{\alpha_2 t}$$

C_1，C_2 は積分定数。
初期条件から決まる

例題（1）

x軸上を運動する質点の加速度が $a = Bx$ であったとする。B は正の定数なので $B = k^2$ とする。

初期条件は $t = 0 \Rightarrow x = x_0 \quad v = v_0$ である。

位置と速度を求めよ。

$$\boxed{a = Bx}$$

$B = k^2$ とおく（便利のため）

$$\frac{d^2x}{dt^2} - k^2 x = 0$$

特性方程式

$$\alpha^2 - k^2 = 0$$

$$\alpha = k, -k$$

一般解

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}$$

速度

$$v = \frac{dx}{dt} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt}$$

この問題があまり現実的でないことがわかる。過去，未来とも，時間とともに速度が指数的に増えていく運動。

係数を初期条件から決める

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 \quad v = v_0$$

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ v_0 = kC_1 - kC_2 \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0}{k}\right) \quad C_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0}{k}\right)$$

例題(2)

x軸上を運動する質点の加速度が $a = Bx$ であったとする。B は負の定数なので $B = -\omega^2$ とする。

初期条件は $t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 \quad v = v_0$ である。

位置と速度を求めよ。

$$\boxed{a = Bx}$$

$B = -\omega^2$ とおく（便利のため）

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

特性方程式

$$\alpha^2 + \omega^2 = 0$$

$$\alpha = i\omega, -i\omega$$

一般解

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

さて，虚数を含む指数関数とは？

$i = \sqrt{-1}$　虚数

指数関数(その2)

虚数の指数関数
⇒ オイラーの公式 (教科書 p.234)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

実は，複素数の世界までいくと，指数関数と三角関数は「同じ」ものだった！

世界で一番美しい数式 $e^{i\pi} = -1$

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

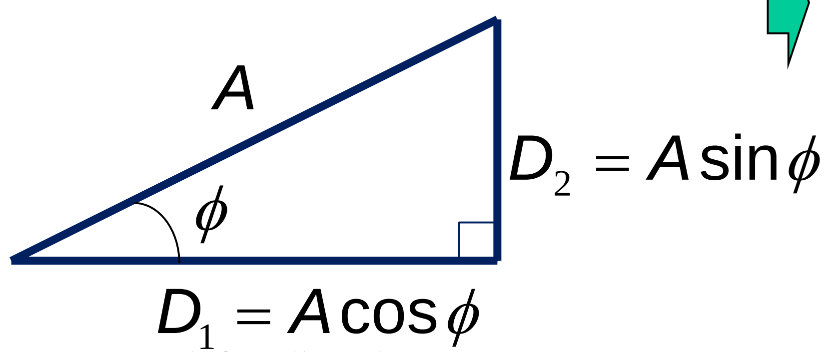
この解にオイラーの公式　$e^{ix} = \cos x + i \sin x$
を適用する。

代入して項を組み替えると以下となる

$$x = D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t$$

D$_1$, D$_2$ は（実数の）積分定数。
初期条件から決まる

下の図で D_1, D_2 から　A, ϕ　を定義



$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

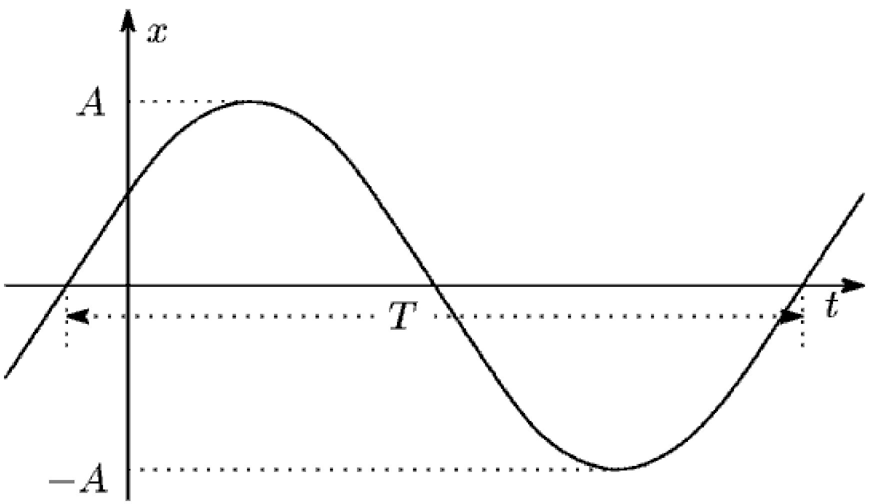
A, ϕ　は（実数の）積分定数。
初期条件から決まる

単振動

このあたり教科書p.37を参考に

周期的な振動運動

- T：周期（1サイクルに要する時間）
- f:振動数(1sに何サイクル振動するか)



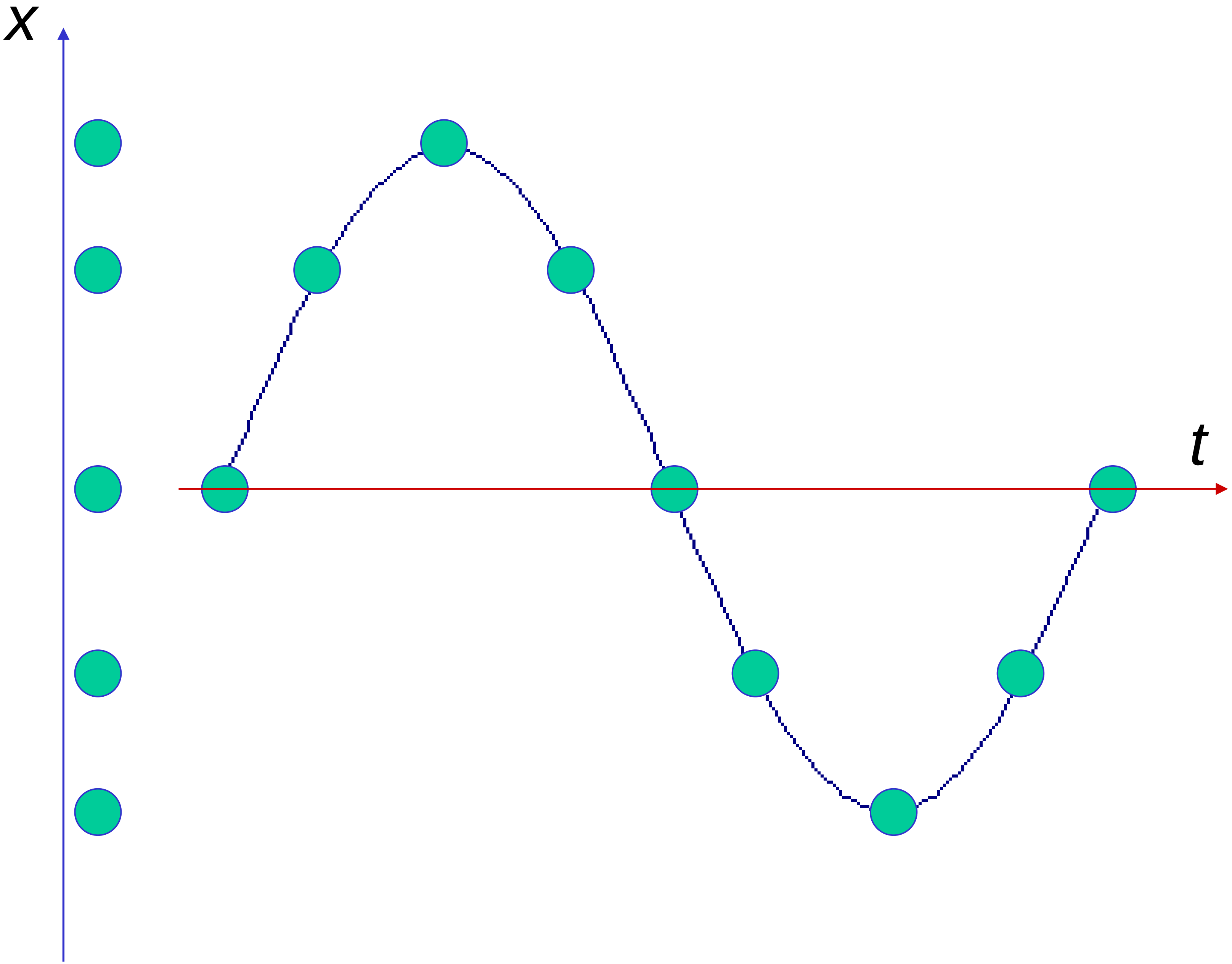
$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

ωt：2π

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad f = \frac{1}{T}$$

単位　s　　　1／s＝Hz

（ヘルツ）

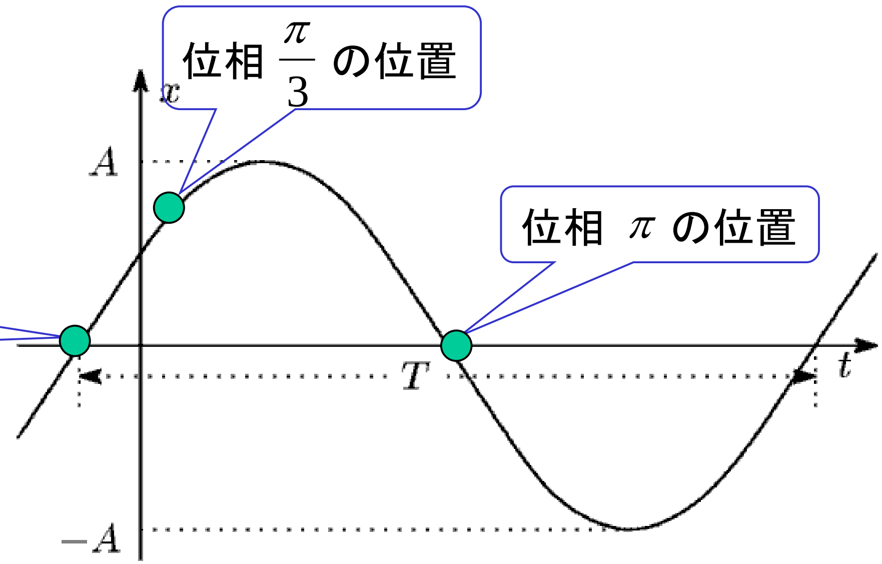

x
t

単振動

このあたり教科書p.37を参考に

位相

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \phi)}$$



- A : 振幅
- sin の引数 : 位相 (phase)

位相は時間とともに変動する
波の「どの位置」にいるかを表す

例題(3) (教科書問2. 8)

単振動:一般論

$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

初期条件

$$t = 0 \quad x = 0, v = V_0$$

速度に関する初期条件をどうやって使うか？

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

$$\begin{cases} 0 = A\sin\phi \\ V_0 = A\omega\cos\phi \end{cases}$$

$$\phi = 0, \ A = \frac{V_0}{\omega}$$

$$\boxed{x = \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t}$$