力学の保存量（2）

３．３ 運動量と角運動量
３．４ 衝突

保存量：復習

- 不変なもの，時間的に変わらないもの

- エネルギー
- 運動量
- 角運動量

運動量，角運動量

- ベクトルの保存量
  直進的運動のはげしさを表す
  回転的運動のはげしさを表す

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$

時間微分（変化の原因）

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

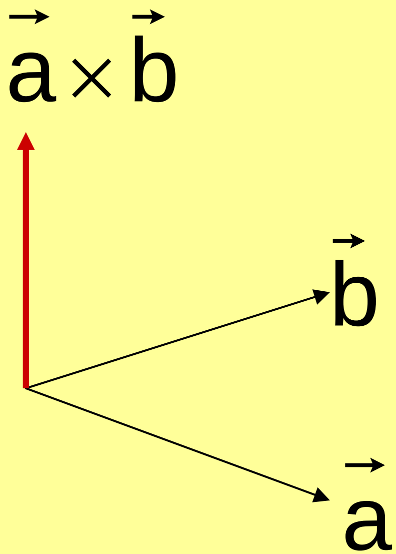
$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{N}$$

力

力のモーメント

ベクトルの外積(p.228,A.3)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{cases}\text{大きさ} & ab\sin\theta \\ \text{向き} & \vec{a},\vec{b}\text{に垂直(右ネジ)}\end{cases}$$



良く使う性質

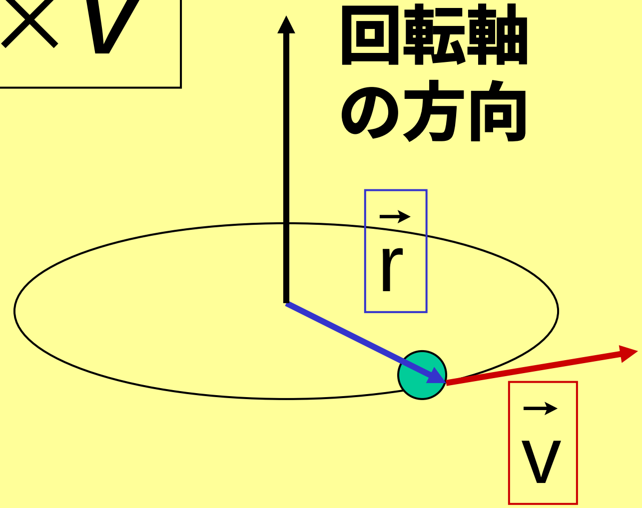
$$\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$$

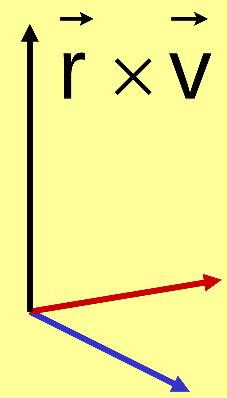
$$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$$

角運動量

回転的運動のはげしさ　$\ell = mrv$

$$\boxed{\vec{\ell} = m\vec{r} \times \vec{v}}$$



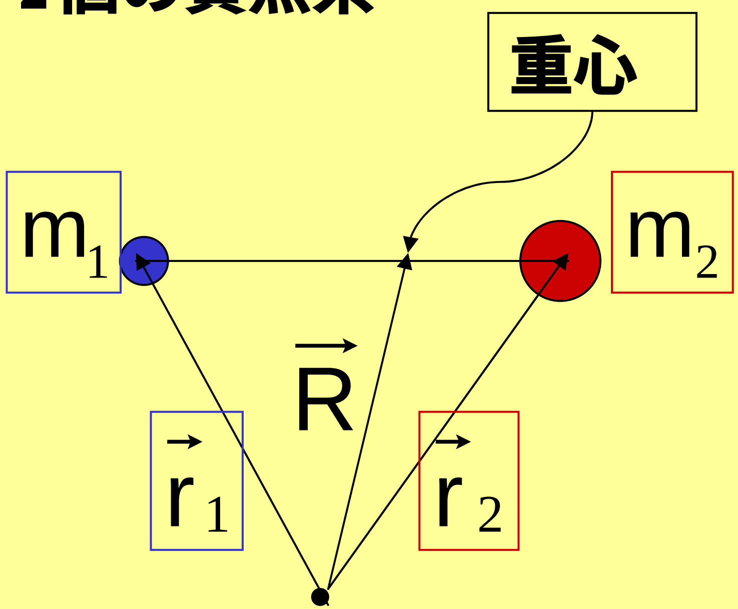


保存則

- 外部からの力，力のモーメントの和が０のとき，系の全運動量，全角運動量は保存する。
- 個々には変化しても総和が一定。
- 証明(p.61)：力学の第３法則（作用反作用の法則）が活躍する。

重心

2個の質点系



$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

N個の質点系

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}$$

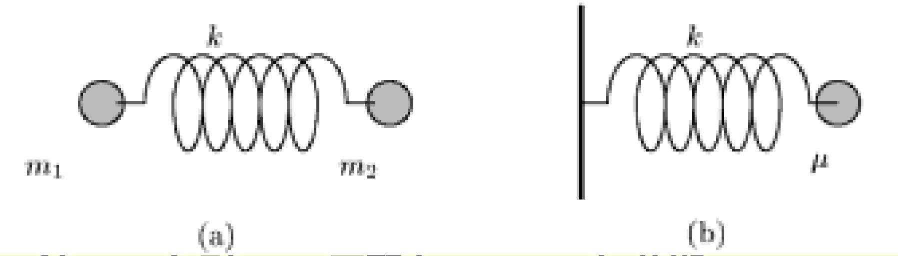
2体系：換算質量

2体系の運動，第3法則に従うとき

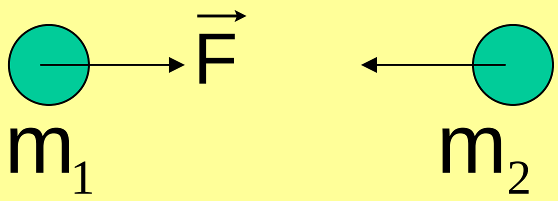
次の換算質量μの1つの質点の運動と同等

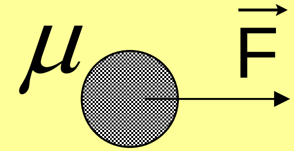
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

例：(a)の振動の周期は(b)のそれと等しい



どういう意味か？
(p.63 の説明の意義)





質量 M，位置 R と質量 μ，位置 ρ の2つの「質点」の方程式

この系の運動を記述する運動方程式

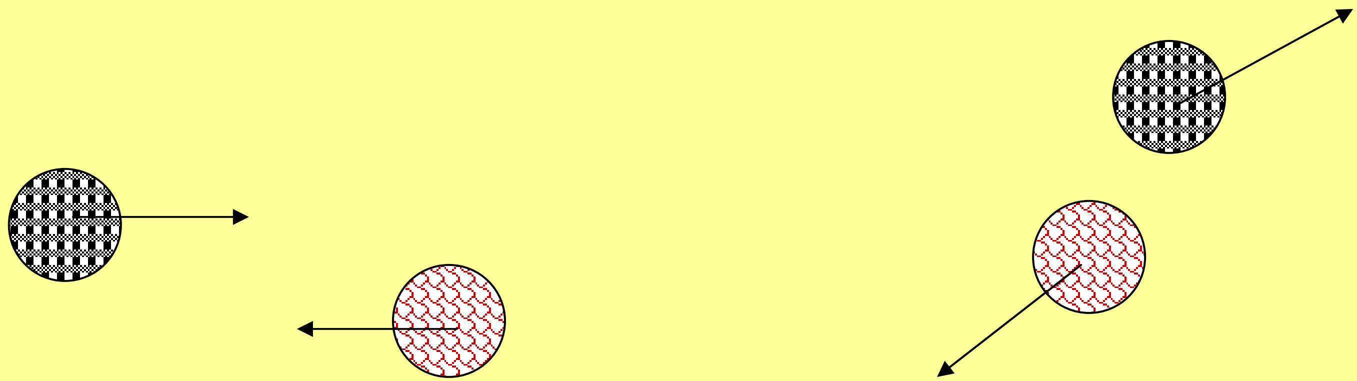
$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{F} \\ m_2 \vec{a}_2 = -\vec{F} \end{cases}$$

数学的変形

$$\begin{cases} M \dfrac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0 \\ \mu \dfrac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} = \vec{F} \end{cases}$$

衝突

- 複数の質点がお互いに力を及ぼして，相手の運動量を変化させる現象。（**合計の運動量は一定**　←運動量保存則）



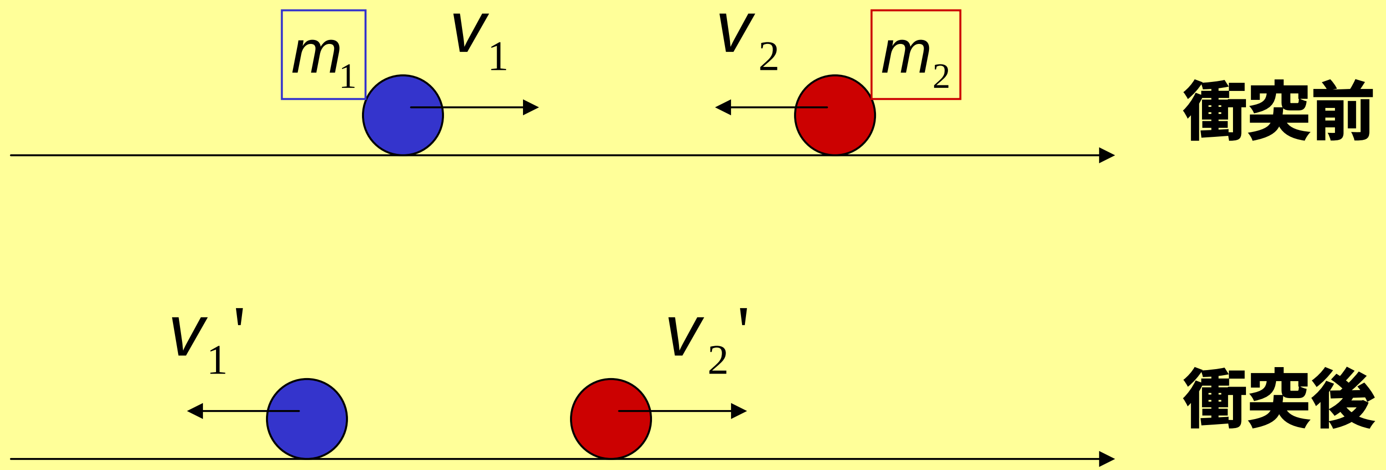
衝突

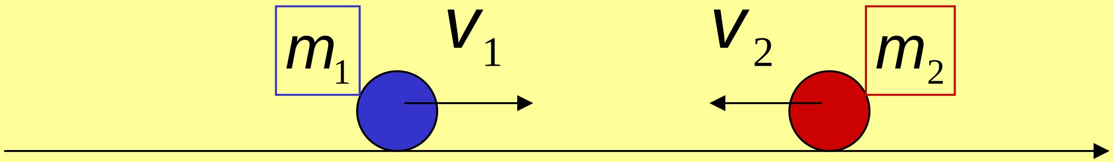
- 衝突で力学的エネルギーが保存する場合…　<u>弾性衝突</u>
- 衝突で力学的エネルギーが保存しない場合…　<u>非弾性衝突</u>　Q＝エネルギーの変化（発生した熱エネルギーなど）

- 非弾性衝突の場合. . . はねかえり係数 e を使う場合もある

1次元衝突

- はじめの速度を与えて，衝突後の速度を求める。





運動量の合計 $$m_1v_1 + m_2v_2$$

エネルギーの合計 $$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

終状態も同様に考え, 保存則を使う

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2 + Q$$

弾性衝突 *(Q=0)*
の場合の解

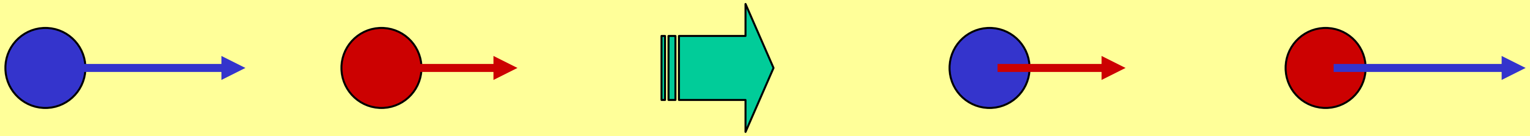
$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

同じ質量のとき→　速度の交換

$$m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad v_1' = v_2, v_2' = v_1$$

ぶつかると



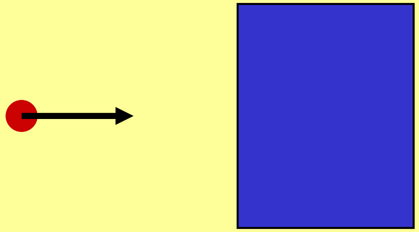
弾性衝突 *(Q=0)*
の場合の解

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

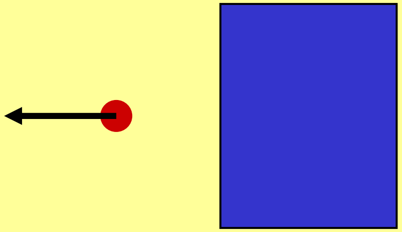
静止標的への衝突→ 壁に衝突

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$



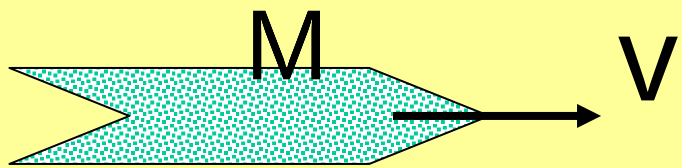
$$m_2 \to \infty$$

$$v_1' = -v_1 \qquad (v_2' = 0)$$

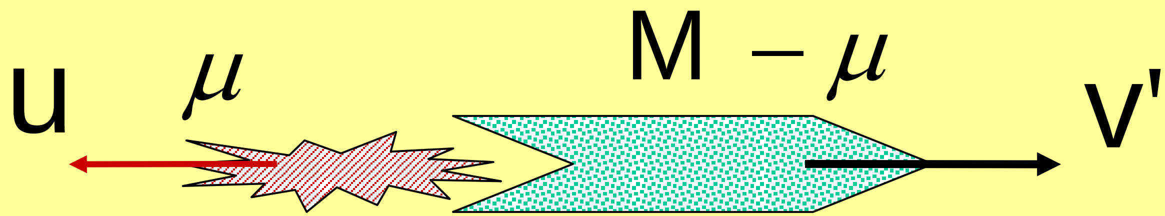


問3．12

まず，問題文を良く読み，
図を描いてみる



燃焼によりエネルギー Q を得た



運動量

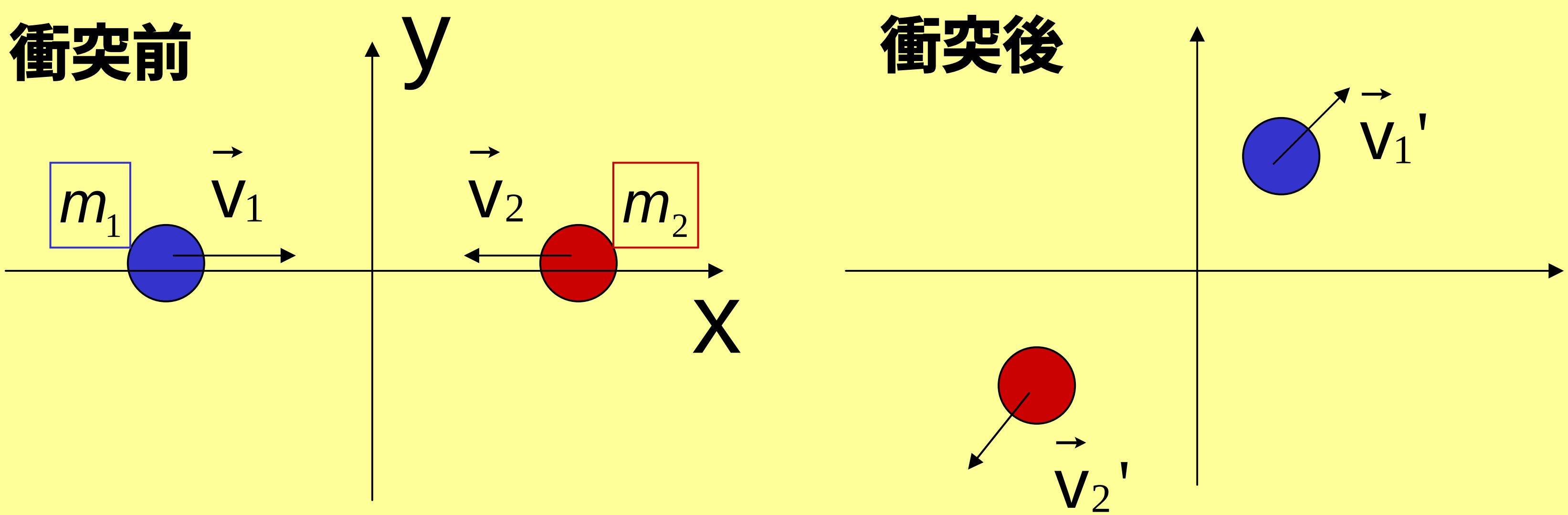
$$Mv = (M - \mu)v' + \mu u$$

エネルギー

$$\frac{1}{2}Mv^2 + Q = \frac{1}{2}(M - \mu)v'^2 + \frac{1}{2}\mu u^2$$

2次元衝突

- はじめの速度を与えて，衝突後の速度を求める。



2次元衝突

- 運動量保存則，エネルギー保存則を使うことは同様。
- 運動量保存則はｘ，ｙ成分に分けて考える。

問3.14

まず，問題文を良く読み，

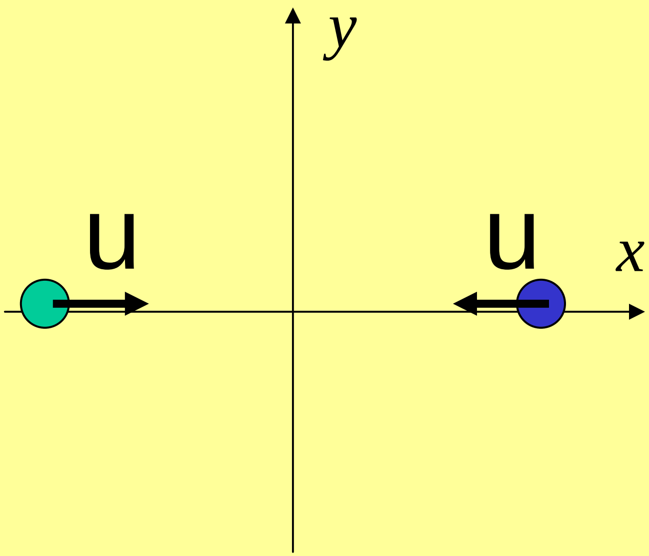
図を描いてみる

$$\vec{v}_1 = (+u, 0)$$

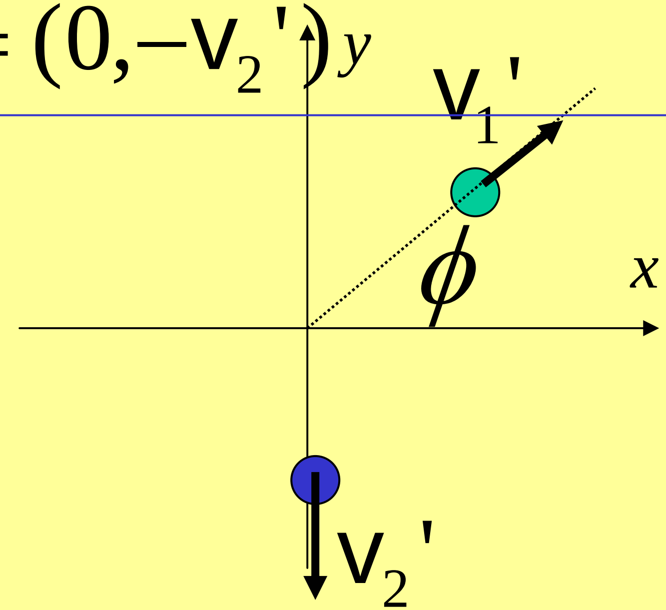
$$\vec{v}_2 = (-u, 0)$$

$$\vec{v}_1{}' = (v_1{}'\cos\phi, v_1{}'\sin\phi)$$

$$\vec{v}_2{}' = (0, -v_2{}')$$



初めの状態



終りの状態

$$\vec{v}_1 = (+u, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (-u, 0)$$

$$\vec{v}_1' = (v_1' \cos\phi, v_1' \sin\phi)$$

$$\vec{v}_2' = (0, -v_2')$$

運動量x成分

$$m_1 u + m_2(-u) = m_1 v_1' \cos\phi + 0$$

運動量y成分

$$0 + 0 = m_1 v_1' \sin\phi + m_2(-v_2')$$

$$(m_1 v_1')^2 = ((m_1 - m_2)u)^2 + (m_2 v_2')^2$$

エネルギー

$$\tfrac{1}{2} m_1 u^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

あとは代入して計算する！