物理学C

質点系と剛体

目標

質点（物理学A, B）
大きさを持たない。
属性: 質量
記述: 時間
位置
速度
:

直進運動

剛体（物理学C）
大きさ･形がある（よりリアル）。
変形は考えない。
属性: 質量, それと？
記述: 時間
位置
速度
:

並進（直進）運動＋回転運動

大きさがある→「向き」を区別する
→「向き」が変化する＝回転運動

質点：基本の復習(1)

Newtonの3つの法則　教科書p.25

運動方程式
(万物を支配する究極の方程式)

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

エネルギー

運動エネルギー　$K = \frac{1}{2}mv^2$　動いている質点の持つエネルギー

ポテンシャルエネルギー　U　力の表現であるエネルギー

単位　力 N　エネルギー J

質点：基本の復習(2)

		単位	
m	質量	kg	
t	時間	s	基本
$\vec{r}=(x,y,z)$	位置(座標)	m	$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$
$\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$	速度	m/s	
$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$	加速度	m/s^2	$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

質点：基本の復習(3)

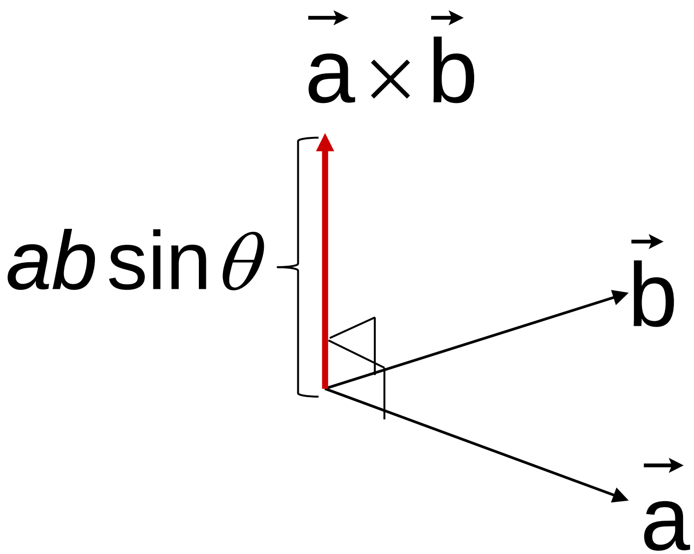
		基本関係	理解
$\vec{F}$	力	$\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	運動量の「変化の原因」が力
$\vec{p} = m\vec{v}$	運動量		
$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$	力のモーメント	$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$	角運動量の「変化の原因」が力のモーメント
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	角運動量		

教科書 p.60

× 外積の記号
教科書 p.241

ベクトルの外積(p.241,A.3)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{cases} 大きさ & ab\sin\theta \\ 向き & \vec{a},\vec{b}\ \text{に垂直（右ネジ）} \end{cases}$$

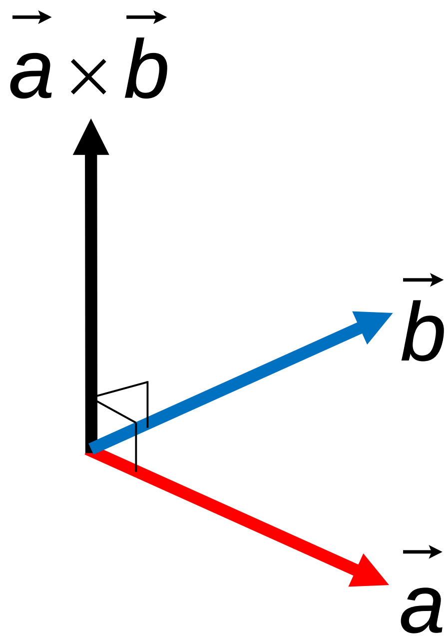


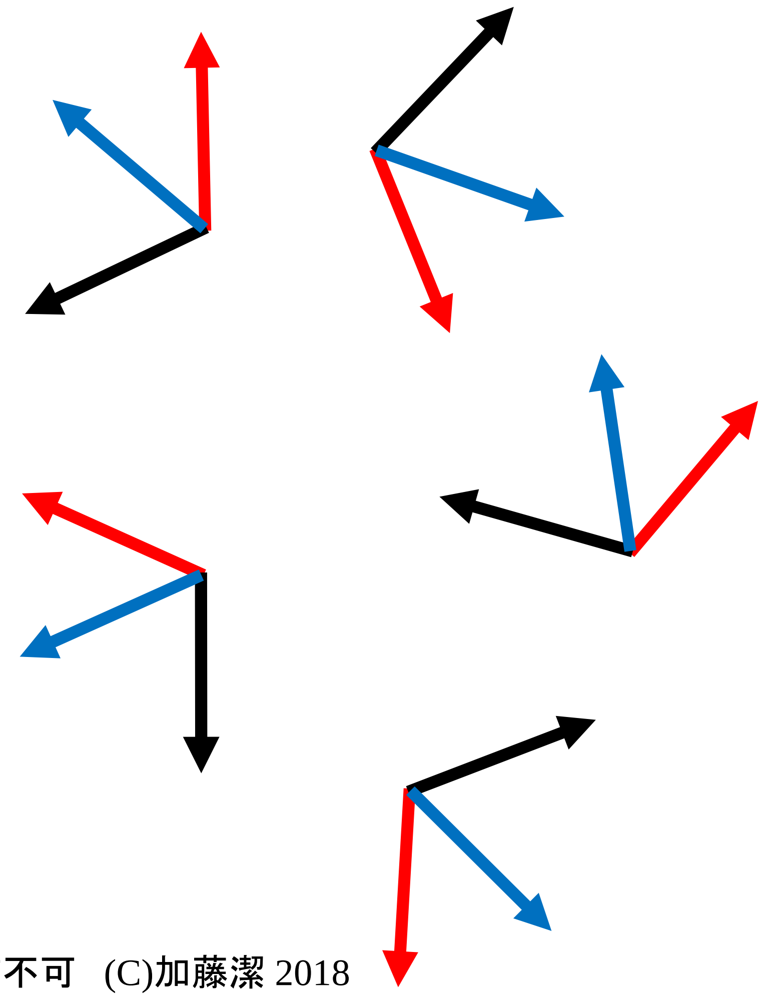
良く使う性質

$$\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$$

$$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$$

外積　(p.241)

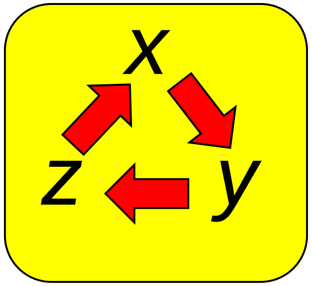




位置関係をしっかり頭に
刻み込むこと
皆さんは「3次元」の存在

外積，成分での表現 (p.241)

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \qquad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$



x , y , z

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\quad , \quad , \quad)$$

$a_y b_z$ $a_z b_x$ $a_x b_y$

この図式を頭に入れる

あとは逆の添字の積を引き算

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y \quad , \quad a_z b_x - a_x b_z \quad , \quad a_x b_y - a_y b_x)$$

運動

理解

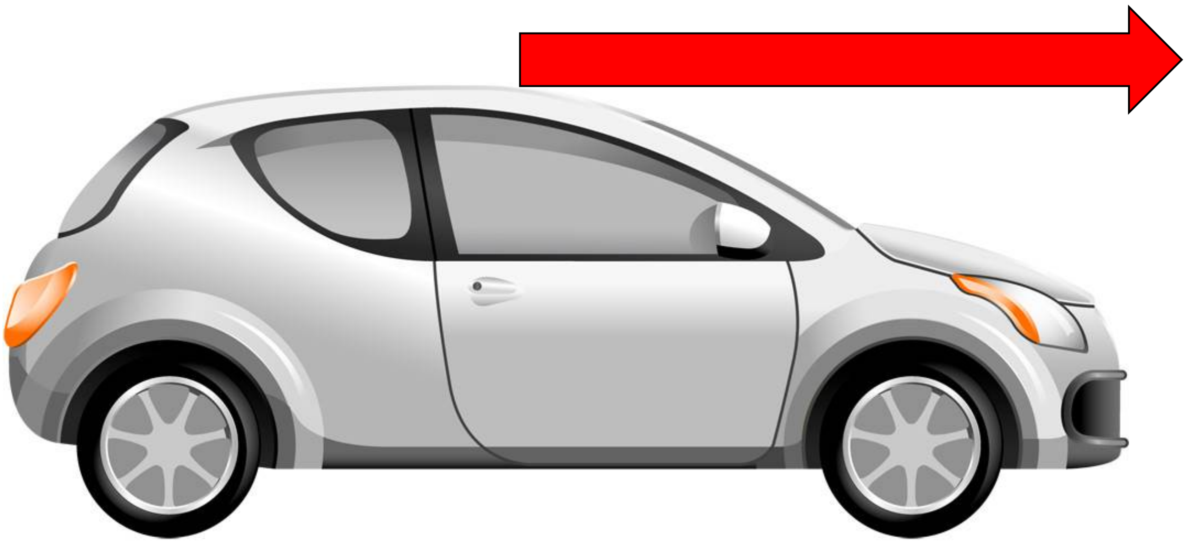
$\vec{p} = m\vec{v}$　運動量　直進的な運動の「はげしさ」を表す量

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$　角運動量　回転的な運動の「はげしさ」を表す量

$= m\vec{r} \times \vec{v}$

運動量

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

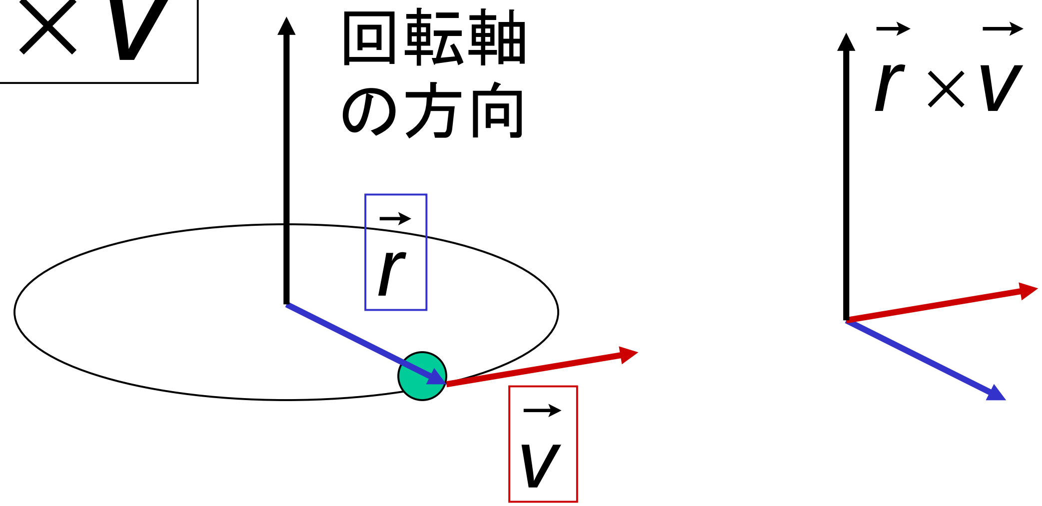


角運動量

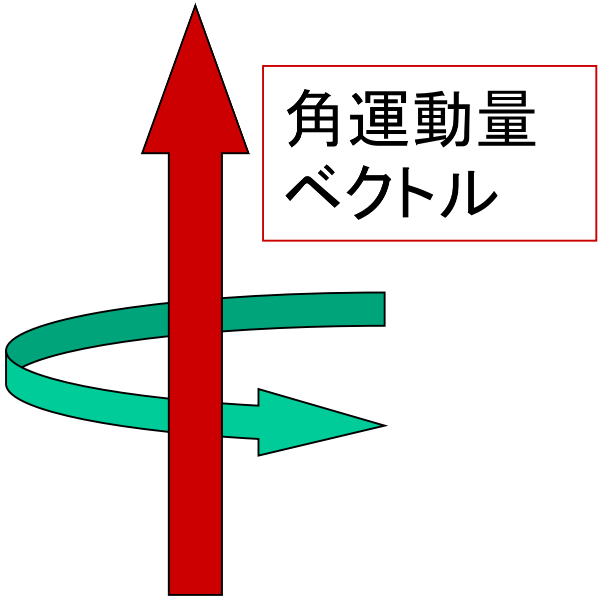
回転的運動のはげしさ　$L = mrv$

ベクトルの外積

$$\boxed{\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}}$$



角運動量



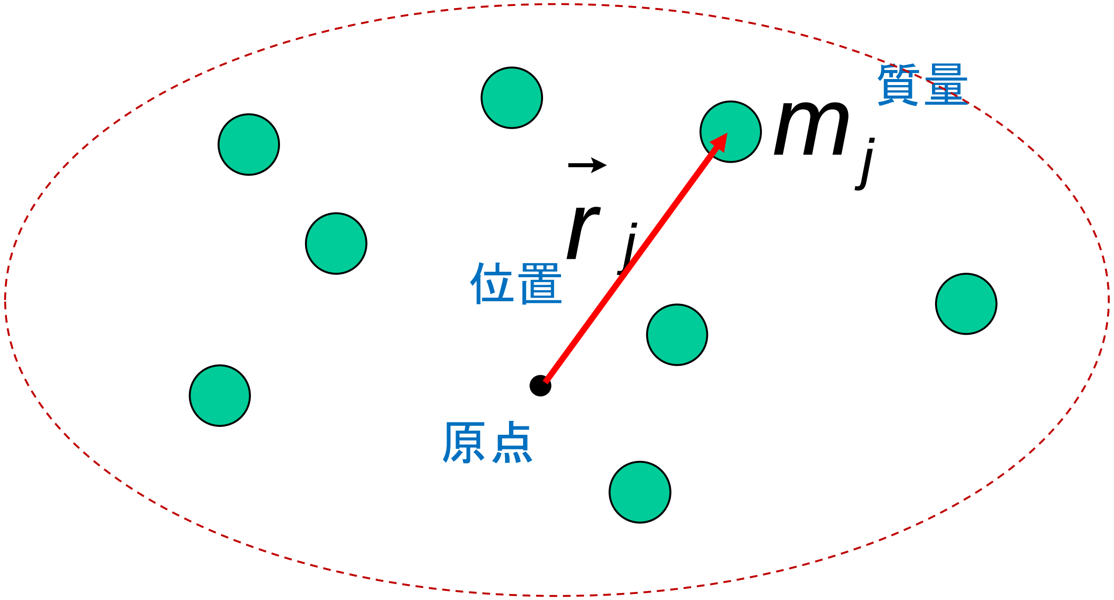
浅田真央

質点系と剛体

質点系

複数の質点の集まり

$m_1, m_2, \ldots$ 　のように量に添字をつけ区別

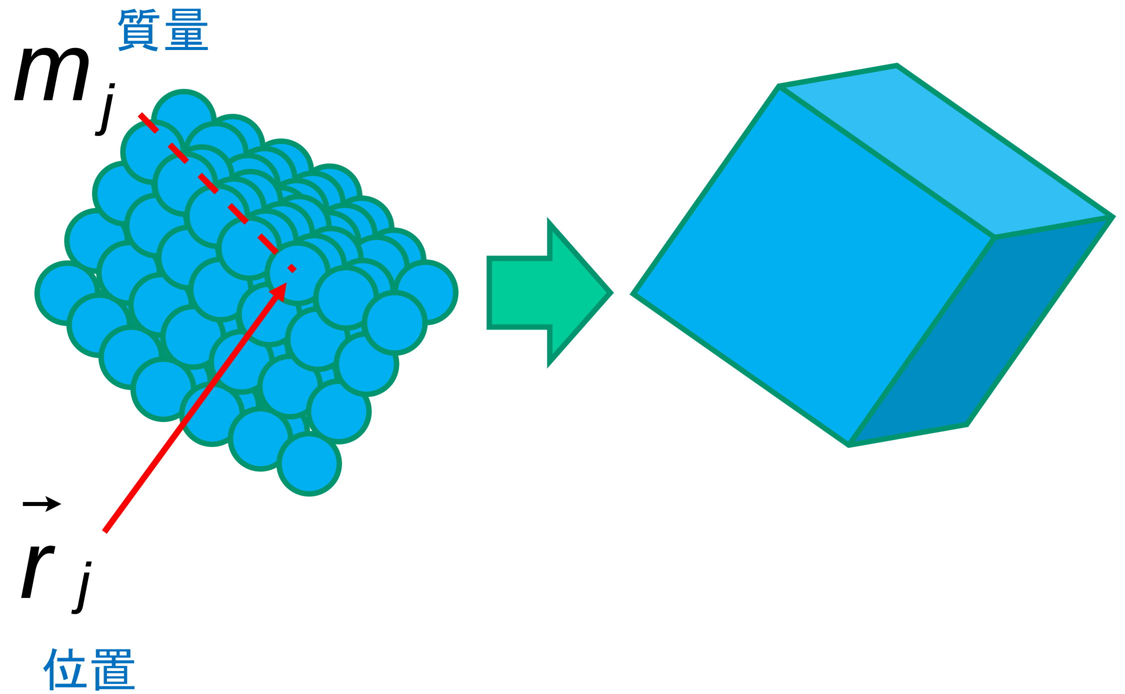


質点系→剛体

剛体のモデル

剛体＝多数の質点の集まり

ただし，相互の位置関係が変化しない



これからの議論

質点系について，運動量，角運動量に関する運動方程式を作る

使うもの：$F=ma$ と 運動の第3法則

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$$

→ その利用（1） 運動量，角運動量に関す保存則を示す

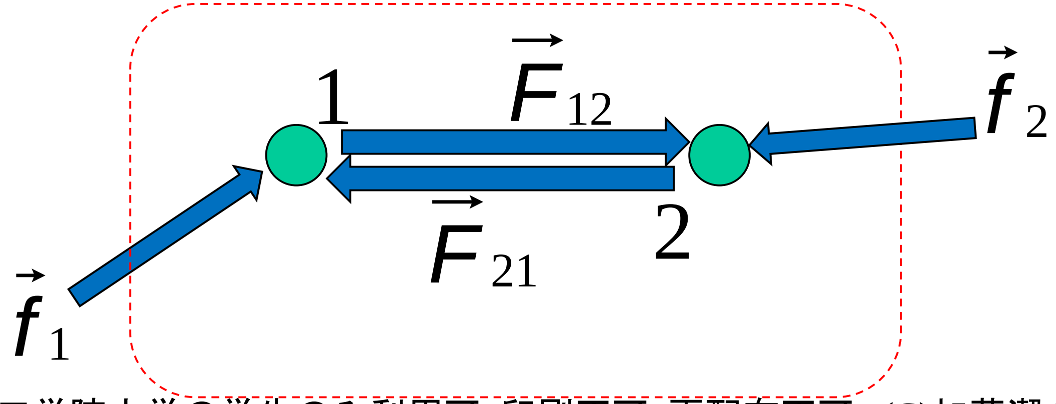
→ その利用（2） それが剛体の運動方程式となる

力の記号 (p.63)

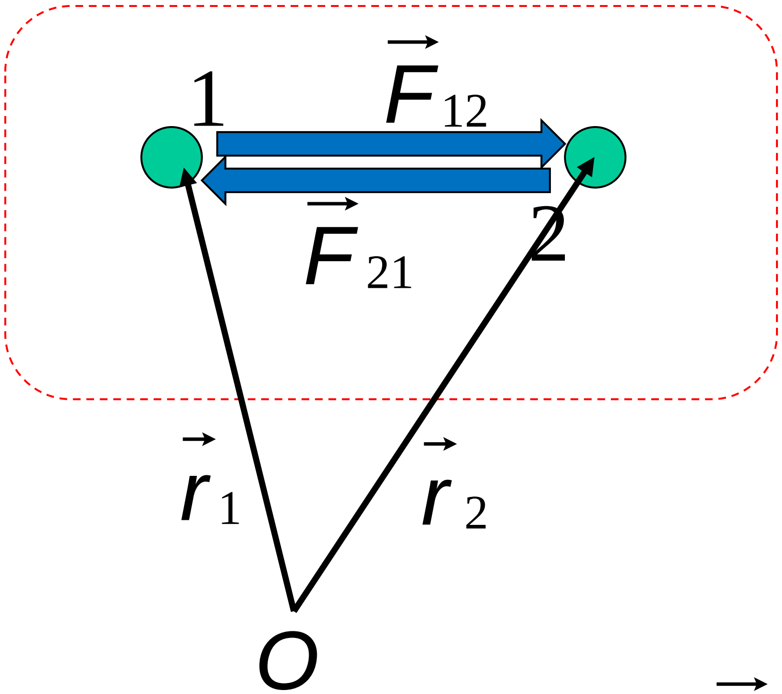
$\vec{F}_j$　　質点 j に働く力

$\vec{F}_{jk}$　　質点 j が質点 k におよぼす力（内力）

$\vec{f}_j$　　質点 j に系外から働く力（外力）



作用反作用の法則



作用と反作用が等しい

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

力の向きは両者を結ぶ方向

$$\vec{F}_{12} \,//\, \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad \vec{F}_{21} \,//\, \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

証明（教科書 p.63）

n 個の質点系を考え，それぞれに，Newtonの方程式を書く

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = \phantom{\vec{F}_{12} +} \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \ldots + \vec{F}_{n1} + \vec{f}_1 \\
\dfrac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{12} + \phantom{\vec{F}_{22} +} \vec{F}_{32} + \ldots + \vec{F}_{n2} + \vec{f}_2 \\
\qquad \vdots \\
\dfrac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_{1n} + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_{n-1,n} + \phantom{\vec{F}_{nn}} \vec{f}_n
\end{cases}
$$

証明（教科書 p.63）

両辺の和をとり，全部加える。

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \ldots + \vec{F}_{n1} + \vec{f}_1$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \ldots + \vec{F}_{n2} + \vec{f}_2$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

打ち消す

$$\vdots$$

$$+)\quad \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_{1n} + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_{n-1,n} + \vec{f}_n$$

$$\sum \frac{d\vec{p}_j}{dt} = \sum \vec{f}_j$$

運動量と力

$$\sum \frac{d\vec{p}_j}{dt} = \sum \vec{f}_j$$

外力の合計

全運動量　$\vec{P} = \sum \vec{p}_j$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

証明（教科書 p.63）

それぞれに, $\vec{r}_j$ を左から外積で乗じ, 全部加える。

$$\boxed{\vec{r}_1 \times}\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \dots + \vec{F}_{n1} + \vec{f}_1$$

$$\boxed{\vec{r}_2 \times}\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \dots + \vec{F}_{n2} + \vec{f}_2$$

$$\vdots$$

$$+)\quad \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_{1n} + \vec{F}_{2n} + \vec{F}_{n-1,n} + \vec{f}_n$$

$$\boxed{\vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}}$$

これはゼロになる

$$\sum \vec{r}_j \times \frac{d\vec{p}_j}{dt} = \sum \vec{r}_j \times \vec{f}_j$$

角運動量と力のモーメント

$$\sum \vec{r}_j \times \frac{d\vec{p}_j}{dt} = \qquad \sum \vec{r}_j \times \vec{f}_j$$

外力のモーメントの合計

全角運動量 $\vec{L} = \sum \vec{L}_j$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ext}$$

結果のまとめ

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ext}$$

保存則

- 外部からの力の和，力のモーメントの和が0のとき，質点系の全運動量，全角運動量は保存する。
- 個々は変化するが，総和が一定。

運動量・角運動量保存則

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ext}$$

もし，外部からの影響がなければ

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P} = 一定 \quad \vec{L} = 一定$$

剛体の運動方程式

質点系で成り立つことは剛体でも成り立つ

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

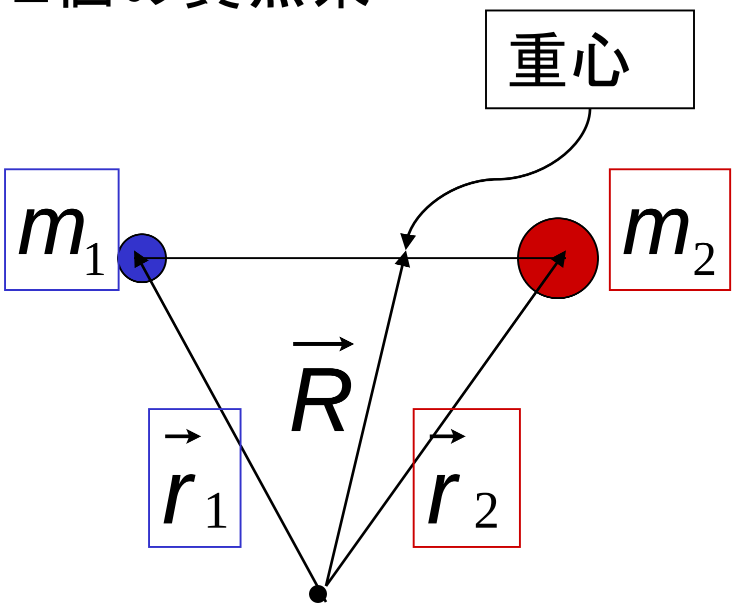
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

剛体の並進運動を記述

剛体の回転運動を記述

質点系の重心

２個の質点系



$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

N個の質点系

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

剛体の並進運動

重心座標

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$

全質量

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

重心の速度 $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{V}}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}$$

剛体の重心の並進運動は質点の場合と同じ