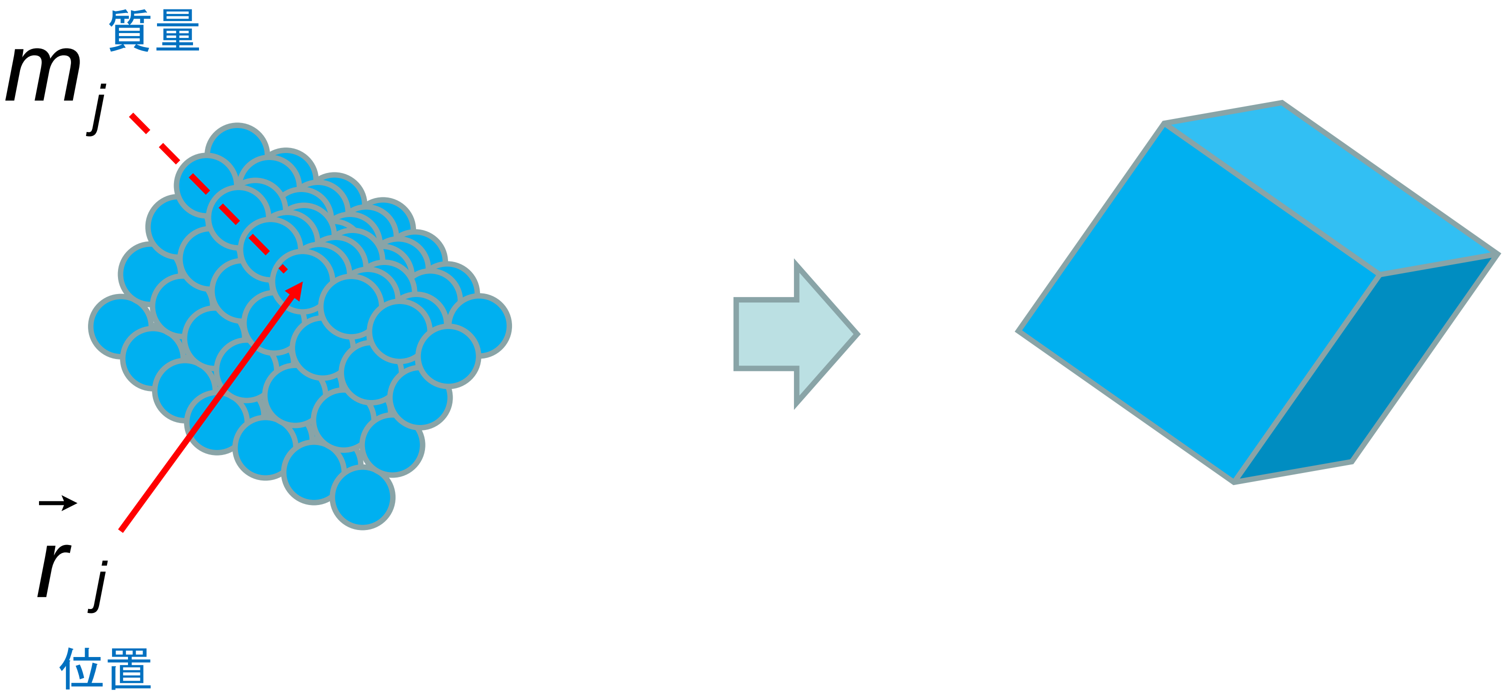
物理学C

剛体に働く重力
剛体の重心
重心と積分の考え方

剛体

多数の微小な質点の集まり（相互の位置関係は不変）



剛体の運動方程式

前回の結果（質点系から導いた）

剛体の並進運動

運動量

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

力

$\sum \vec{f}_j$

剛体の回転運動

角運動量

力のモーメント

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

$\sum \vec{r}_j \times \vec{f}_j$

$\vec{f}_j$ は質点j に働く外力

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}$$

質量M, 座標Rの
「質点」の運動方程式

運動量は個々の質点
の運動量の和

$$\vec{P} = \sum m_j \vec{v}_j$$
$$= \sum m_j \frac{d\vec{r}_j}{dt}$$

R：重心の座標

$$\vec{R} = \frac{\sum m_j \vec{r}_j}{\sum m_j}$$

全質量 $M = \sum m_j$

剛体の並進運動
質量M座標Rの重心が外力Fによって運動していると見なしてよい

重心

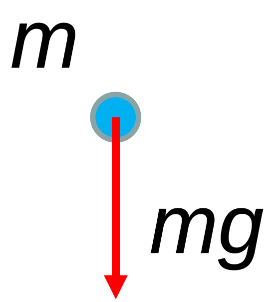
重心座標

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum m_j \vec{r}_j}{\sum m_j}$$

全質量

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum m_j$$

剛体に働く重力

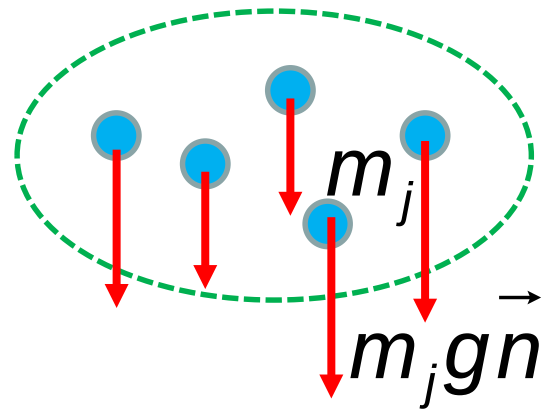


重力

$$F = mg$$

向きも含めた重力のベクトル $\vec{F} = mg\vec{n}$

$\vec{n}$ 重力の向き（鉛直下向き）で長さが1のベクトル



重力は剛体の各部分に働いている

→どう扱うか？

剛体に働く重力

運動方程式の右辺を計算

$$\sum \vec{f}_j$$

$$= \sum m_j g\vec{n}$$

$$= \left(\sum m_j\right) g\vec{n}$$

$$= Mg\vec{n}$$

$$\sum \vec{r}_j \times \vec{f}_j$$

$$= \sum \vec{r}_j \times (m_j g\vec{n})$$

$$= \left(\sum m_j \vec{r}_j\right) \times (g\vec{n})$$

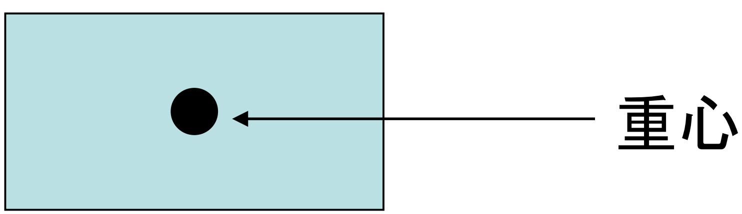
$$= M \frac{\sum m_j \vec{r}_j}{M} \times (g\vec{n})$$

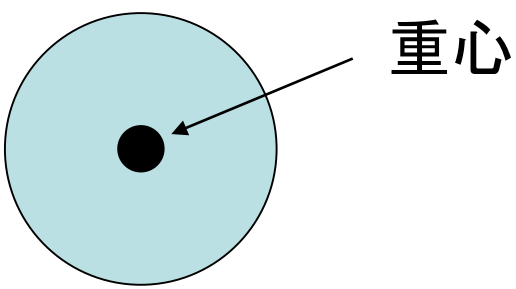
$$= \vec{R} \times (Mg\vec{n})$$

大きさ Mg の重力が重心に働くと考えてよい

剛体の重心(1)

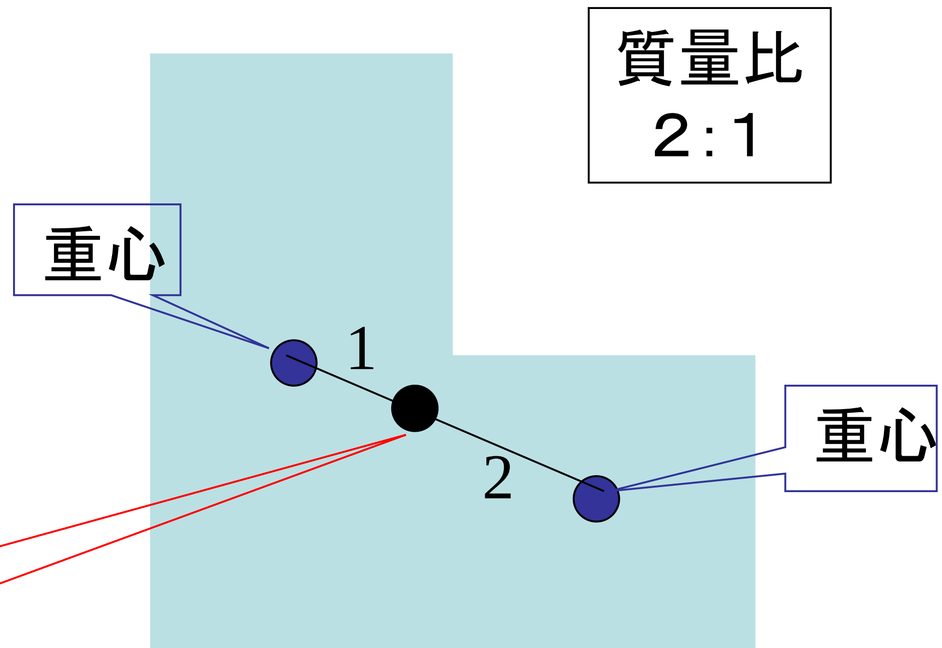
- 剛体の重心の位置
- 一様な密度で対称性のある物体
  ⇒ 幾何学的な「中心」が重心となる
  (例)直方体，円板，球，．．．





剛体の重心(2A)

２つの四角形の和

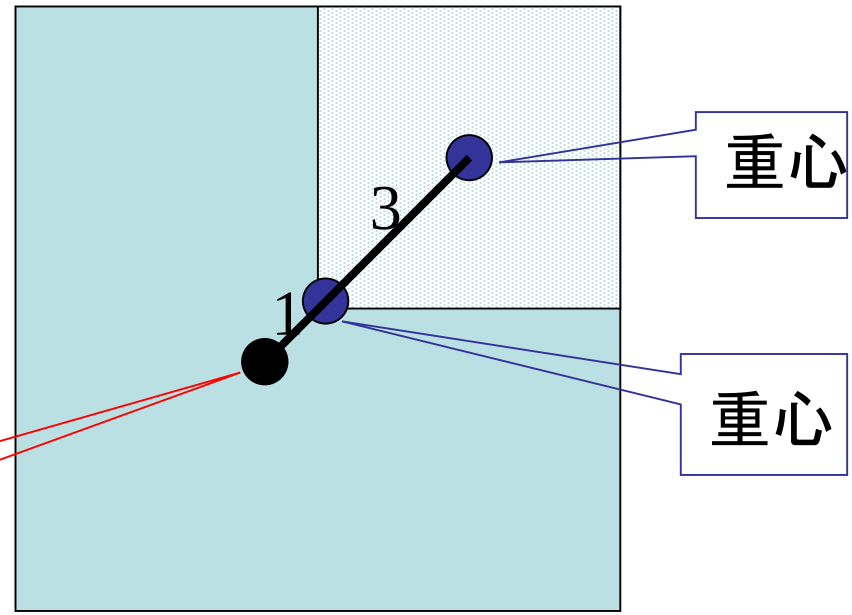


このL字型の
板の重心

３つの正方形の和と考えてもよい

剛体の重心(2B)

大きい正方形から小さい
正方形を除いたと考える



このL字型の板の重心

質量比は 3:1

剛体の重心（3）

積分により求める

積分の極意

- 複雑な対象の分析の基本
  ・・・細かく分解したものを合計する
- 「合計する」
  1つずつ加える・・・原始的手作業
  積分する・・・近代的工業生産

全部合計する

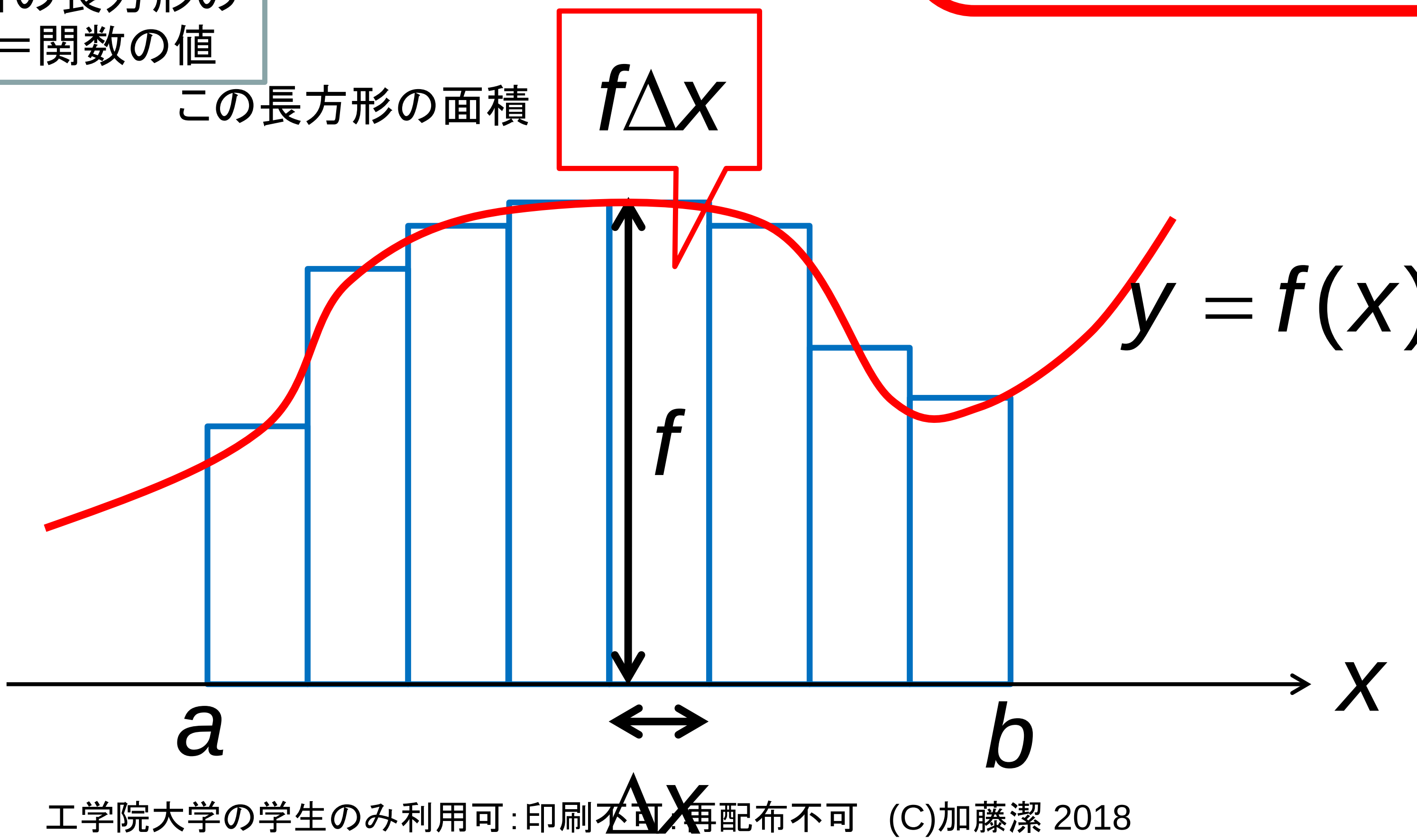
$$S = \sum_j f_j \Delta x$$

j番目の長方形の
高さ＝関数の値

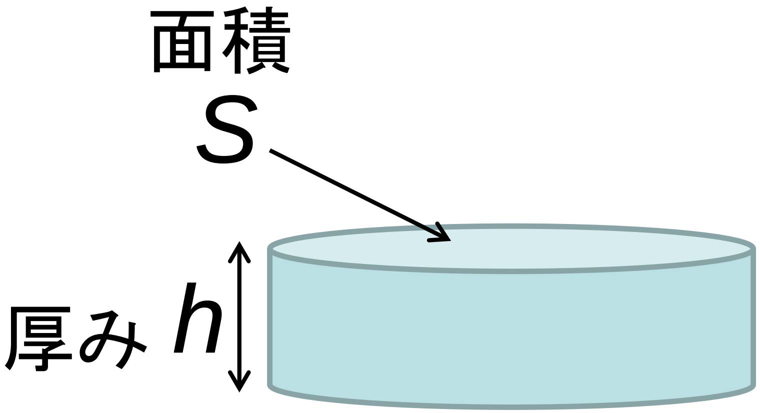
細かく分割した極限

定積分

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

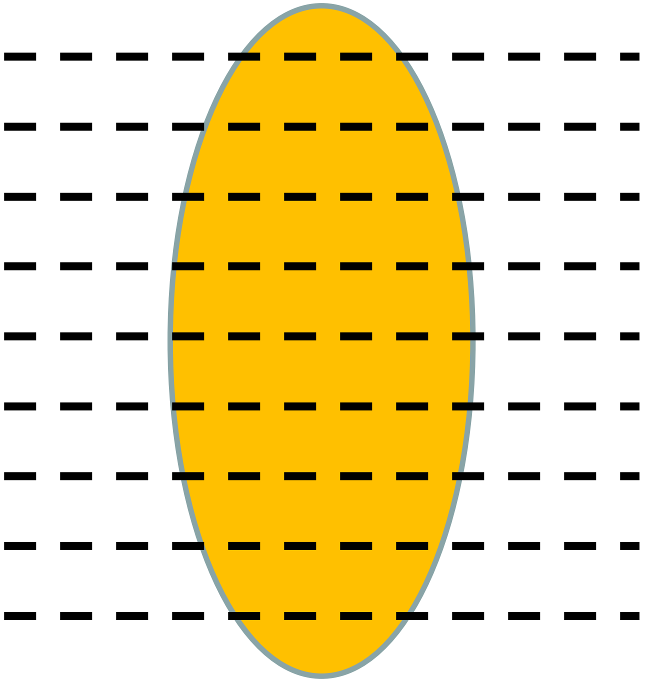


体積の計算



板の体積

$$V = Sh$$

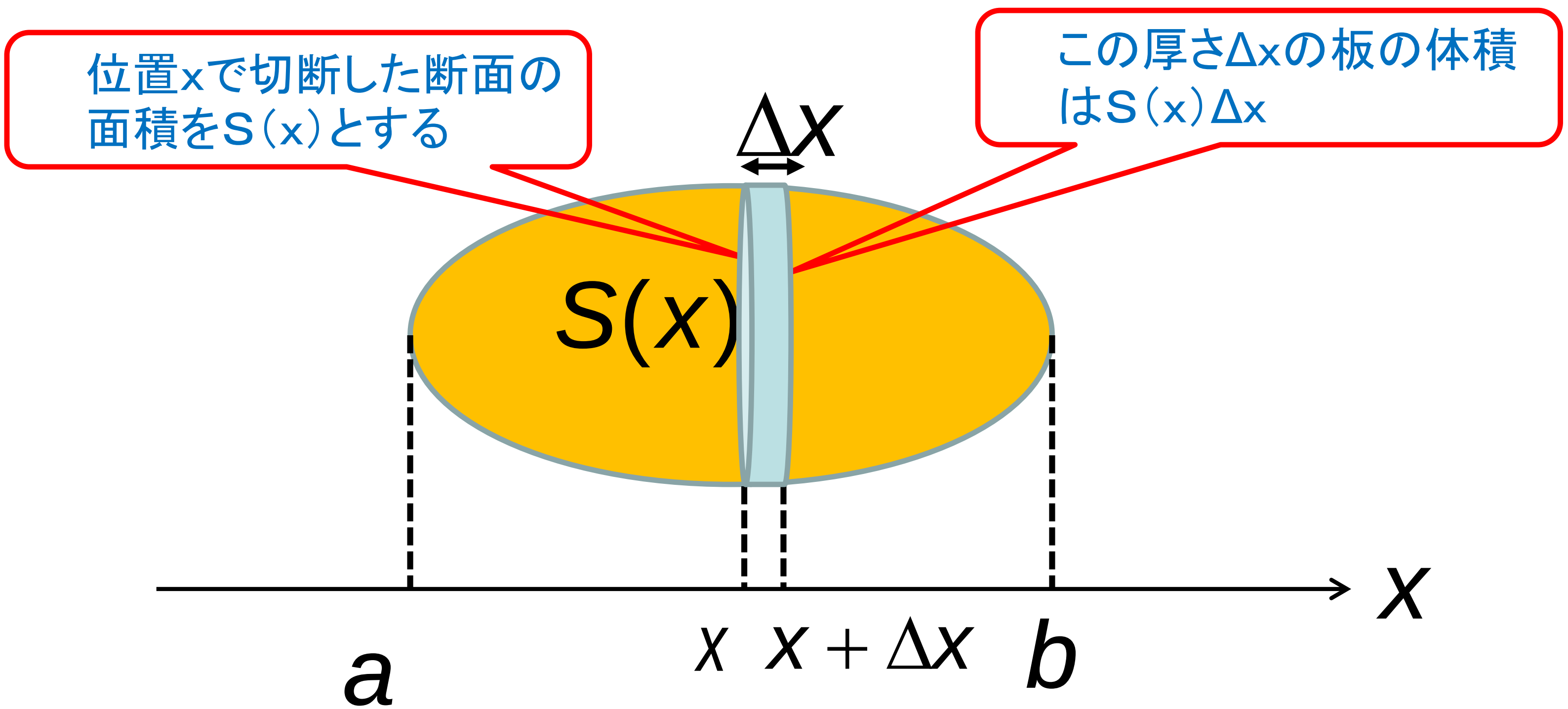


1つ1つを板として体積を計算
⇒ 全部を合計する

「板」の体積を全部足すと全体の体積

体積の計算

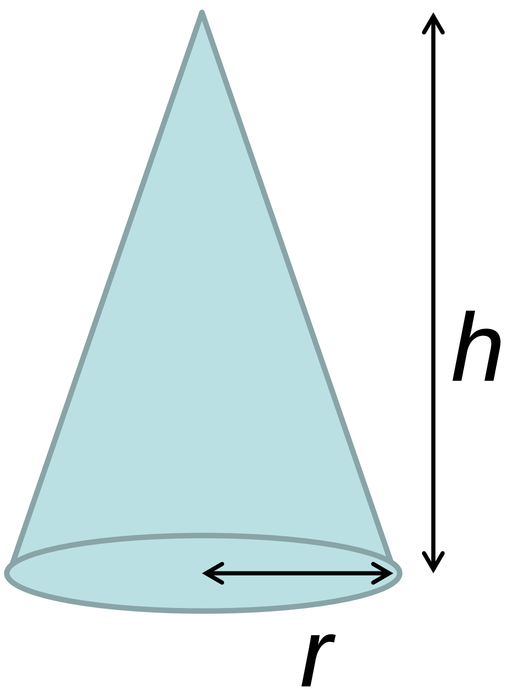
$$V = \sum S(x)\Delta x \Rightarrow V = \int_a^b S(x)dx$$



例題（1）

半径r，高さhの一様な円錐の体積が次の式であることを示せ

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



半径 y を求める。

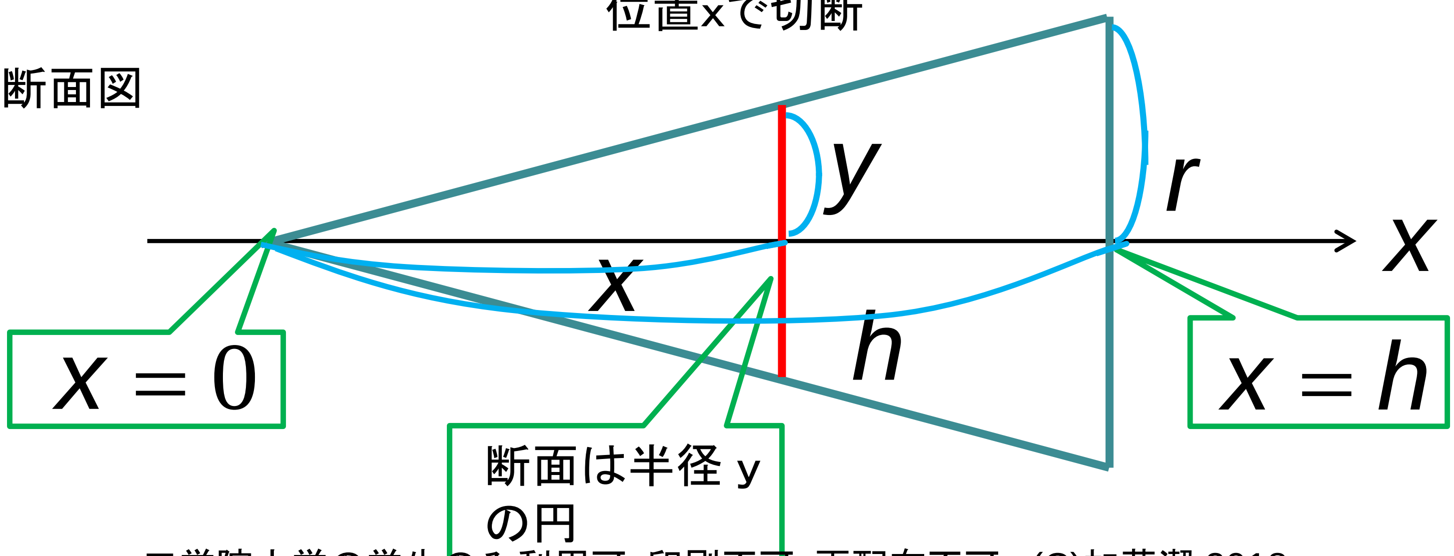
$$y : r = x : h \Rightarrow y = \frac{rx}{h} \Rightarrow S(x) = \pi y^2 = \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}$$

体積

$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \boxed{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

位置xで切断

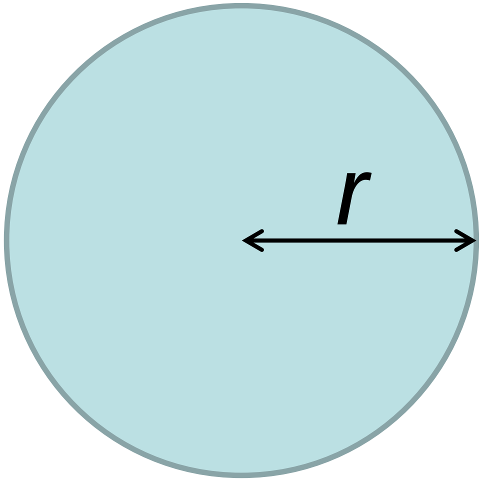
断面図



課題

半径rの一様な球の体積が
次の式であることを示せ

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



課題

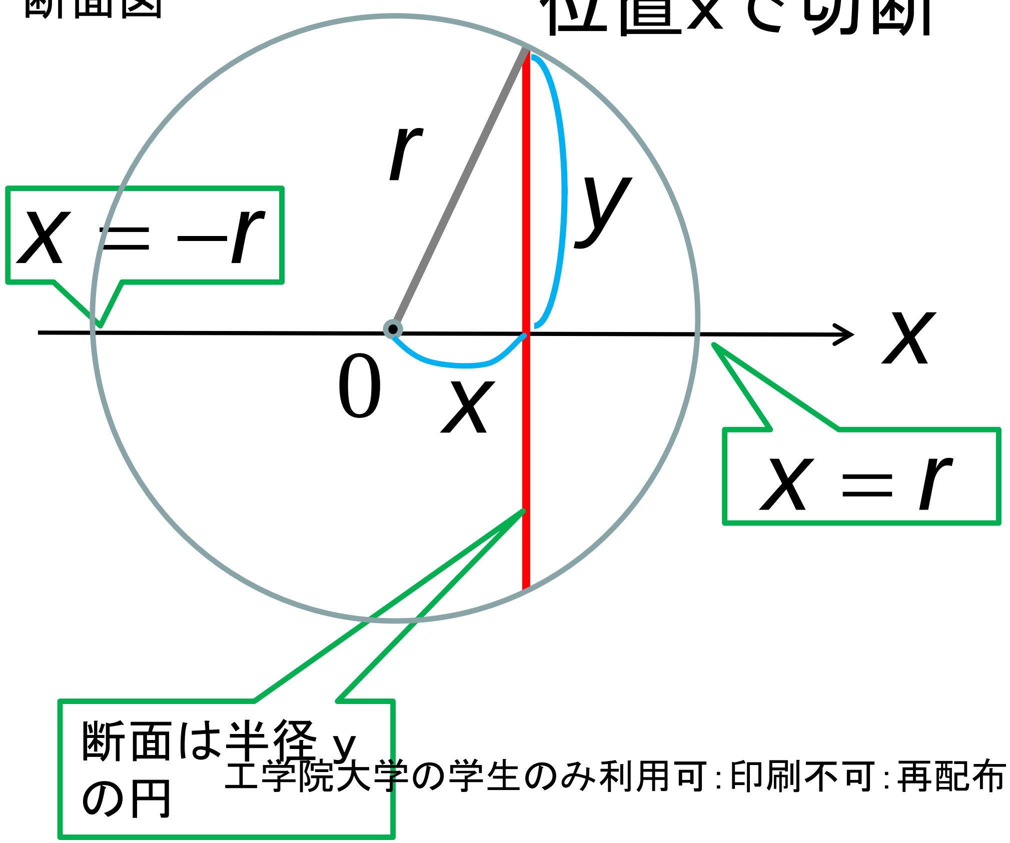
半径 r の球

$$y=\sqrt{r^2-x^2}$$

位置xで切断

$$S(x)=\pi y^2$$
$$=\pi(r^2-x^2)$$

断面図



$$V=\int_{-r}^{r}S(x)dx$$
$$=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}$$
$$=\boxed{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

重心

質点系の
重心座標

$$\vec{R} = \frac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{\sum_j m_j} = \frac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{M}$$

$\vec{r}_j$　j番目の質点の座標

m_j　j番目の質点の質量

M　全質量

剛体の重心も，剛体を（仮想的に）細かく分解すれば同じ式が使える

一様な密度の剛体の重心

$$\vec{R} = \frac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{\sum_j m_j}$$

ρ 密度

v_j j番目の部分の体積

$\Rightarrow$ $m_j = \rho v_j$

← これを代入する

$\Downarrow$

$$\vec{R} = \frac{\sum_j \vec{r}_j v_j}{\sum_j v_j} = \frac{\sum_j \vec{r}_j v_j}{V}$$

全体積

この和を薄い円板の分割和と考える

$$\vec{R} = \frac{\sum_j \vec{r}_j v_j}{V}$$

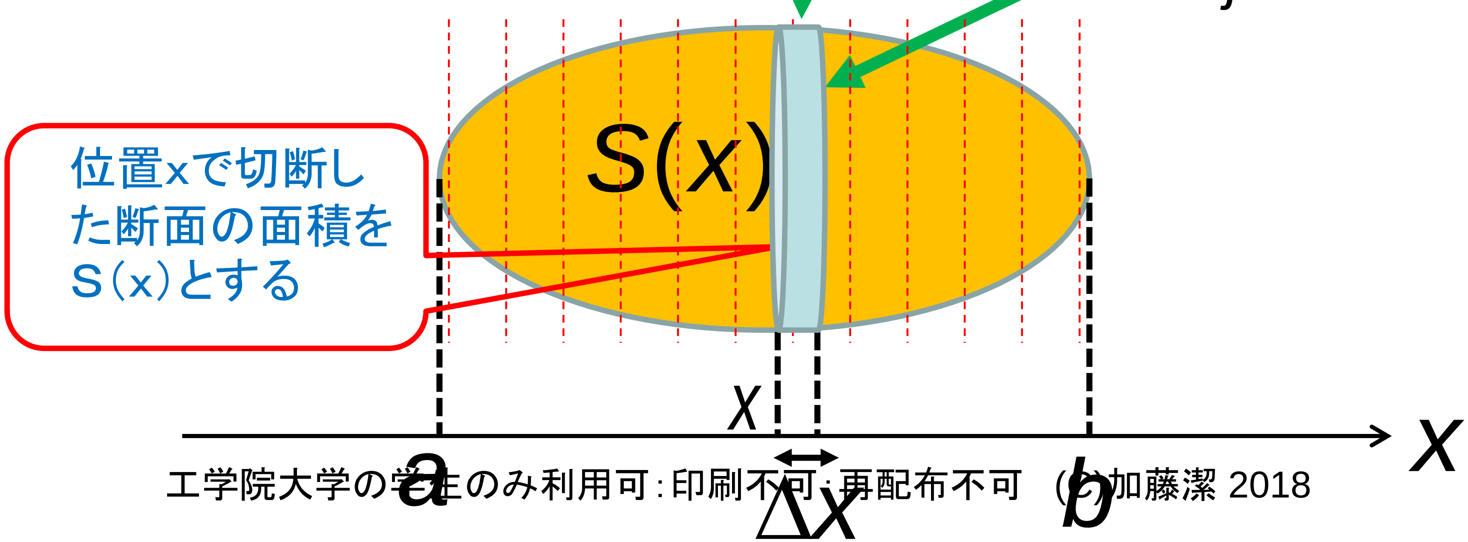
全体積

x成分を求める

$$R_x = \frac{\sum_j x_j v_j}{V}$$

この板では
x座標は「一定」で x_j

この体積が
$v_j = S(x)\Delta x$



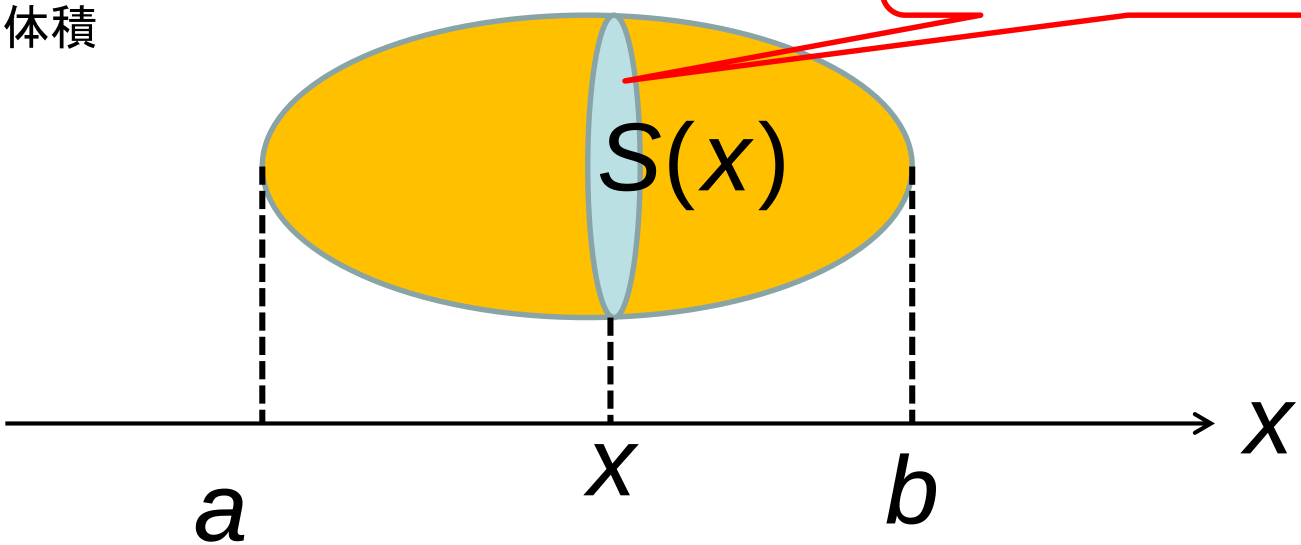
密度一定の物体の重心のx座標の計算

同様にy座標，z座標も計算できる

$$R_x = \frac{\int_a^b xS(x)dx}{V}$$

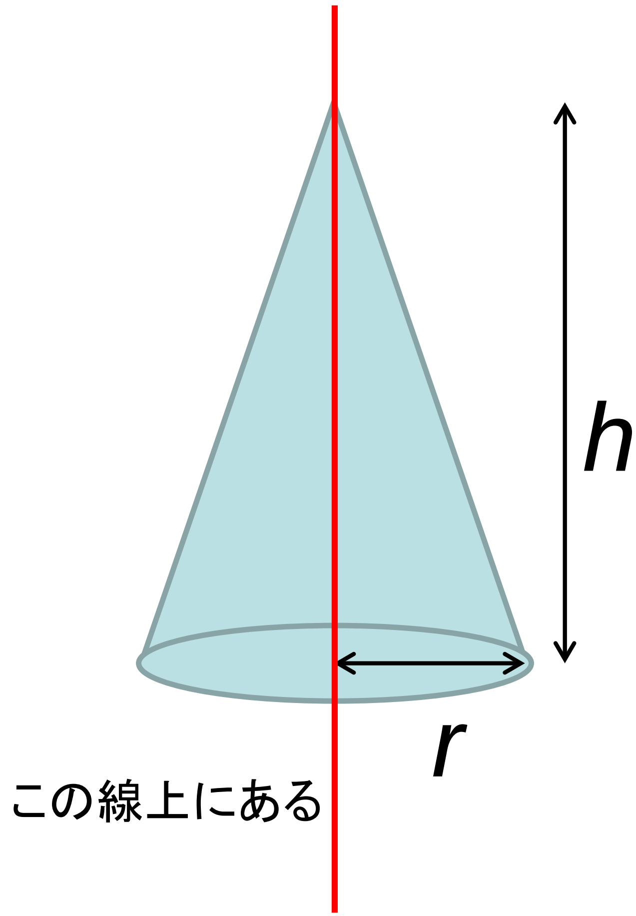
分母は体積である

位置xで切断した断面の面積をS（x）とする



例題（２）

半径r，高さhの一様な円錐の重心の位置を求めよ



中心軸上にあることは明白なので，その位置を求める

例題1の計算を流用

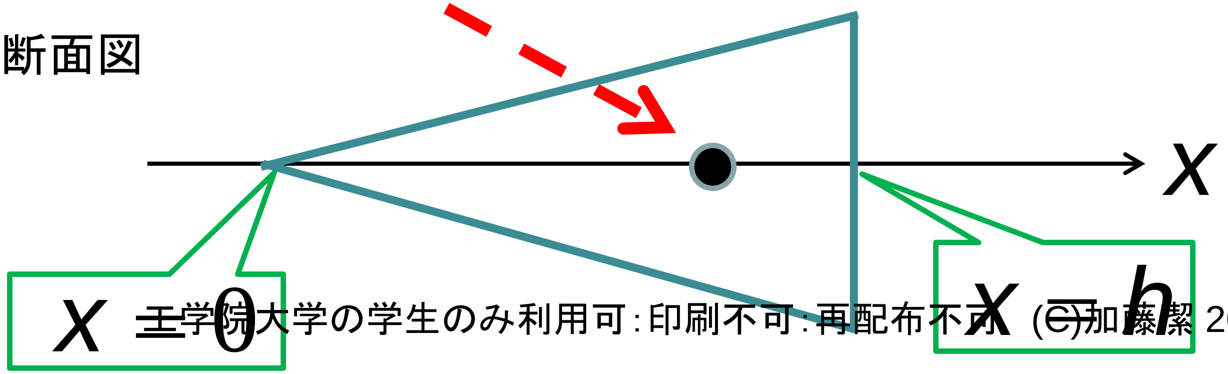
$$S(x) = \pi y^2 = \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}$$

分子

$$\int_0^h xS(x)dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^h = \frac{1}{4}\pi r^2 h^2$$

$$R_x = \frac{\int_0^h xS(x)dx}{V} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2 h^2}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3}{4}h$$

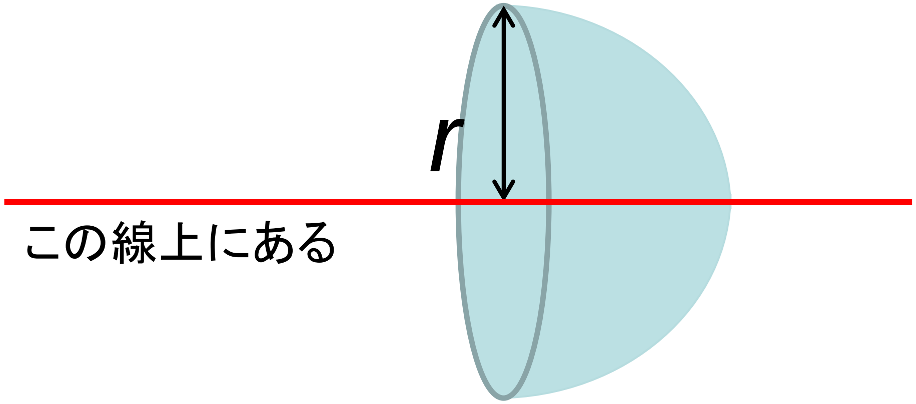
断面図



例題(3)

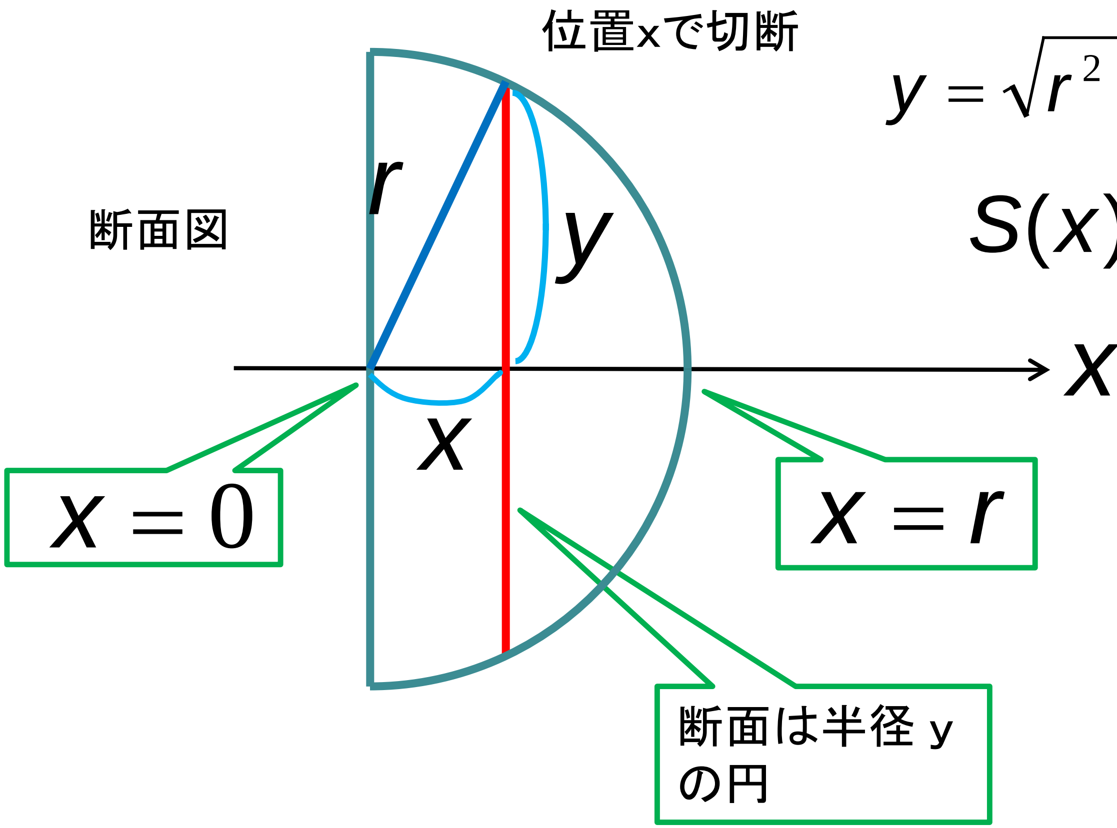
半径rの一様な半球の重心
の位置を求めよ

中心軸上にあること は明白なので,
その位置を求める



半径 r の半球

体積 $V = \dfrac{2\pi}{3} r^3$



$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$S(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

$$R_x = \frac{\int_0^r xS(x)dx}{V}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\pi r^4}{\frac{2\pi}{3} r^3} = \frac{3}{8} r$$