物理学C

剛体の運動エネルギー
慣性モーメント

目標（初回のスライド：再）

質点（物理学A, B）
大きさを持たない。
属性： 質量
記述： 時間
位置
速度
：

直進運動

剛体（物理学C）
大きさ・形がある（よりリアル）。
変形は考えない。

それと？

属性： 質量,
記述： 時間
位置
速度
：

並進（直進）運動＋回転運動

慣性モーメント

- 剛体の運動　並進運動＋回転運動
- 質量:「並進運動」での動かしやすさ，動かしにくさ
- 「回転運動」での動かしやすさ，動かしにくさ
  ⇒　剛体の慣性モーメント I
  ⇒　剛体の形や構造を力学的に記述

並進，回転

位置　速度　加速度

$x \quad v \quad a$

対応関係

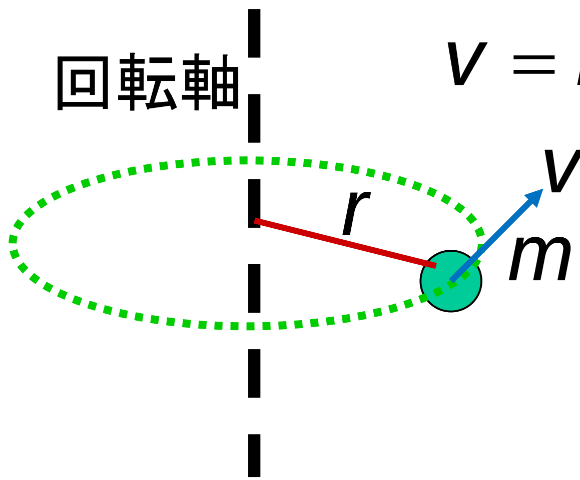
回転角　角速度　角加速度

$\phi \quad \omega \quad \alpha$

運動エネルギー

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

$$v = r\omega$$



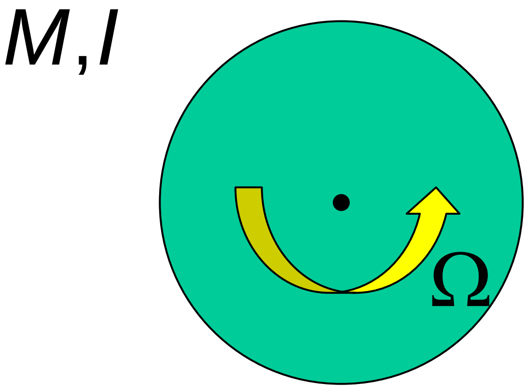
m に mr^2 が対応

慣性モーメント I

剛体の運動の対応(p.82表5.1)

並進運動			回転運動	
	$v=\frac{dx}{dt}$ $a=\frac{d^2x}{dt^2}$		$\omega=\frac{d\phi}{dt}$ $\alpha=\frac{d^2\phi}{dt^2}$	
			角速度 角加速度	
質量	m	⟷	I	慣性モーメント
運動量	$p=mv$	⟷	$L=I\omega$	角運動量
運動方程式	$F=ma$	⟷	$N=I\alpha$	運動方程式
運動エネルギー	$\frac{1}{2}mv^2$	⟷	$\frac{1}{2}I\omega^2$	運動エネルギー

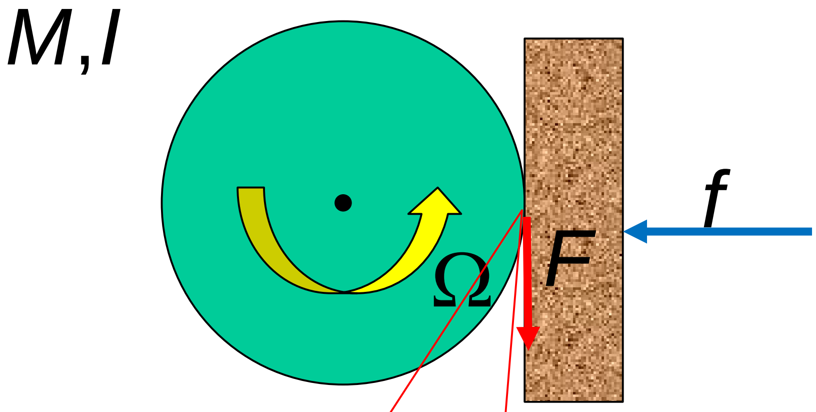
練習－１



質量M，半径r，中心のまわりの慣性モーメントI の円板が一定の角速度Ωで自由に回転している。

1)この円板の運動エネルギーを答えよ。

$$\frac{1}{2}I\Omega^2$$



2）この円板に板を力fで押し付けた。動摩擦係数をμとする。
円板が止まるまでどれだけ回転したか，仕事とエネルギーの関係を用いて答えよ。

摩擦力がここに作用

円板は止まる

仕事を表す関係式 (p.51)

$$W = Fs$$

円板の持つエネルギー ＝ 摩擦力のした仕事

摩擦力

$$F = \mu f$$

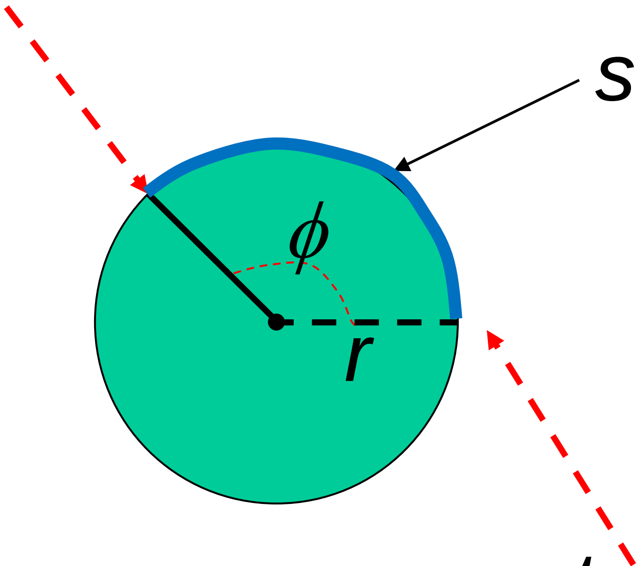
円板の外周が回転した距離

s

$$\frac{1}{2} I\Omega^2 = \mu f s$$

$$\boxed{s = \frac{I\Omega^2}{2\mu f}}$$

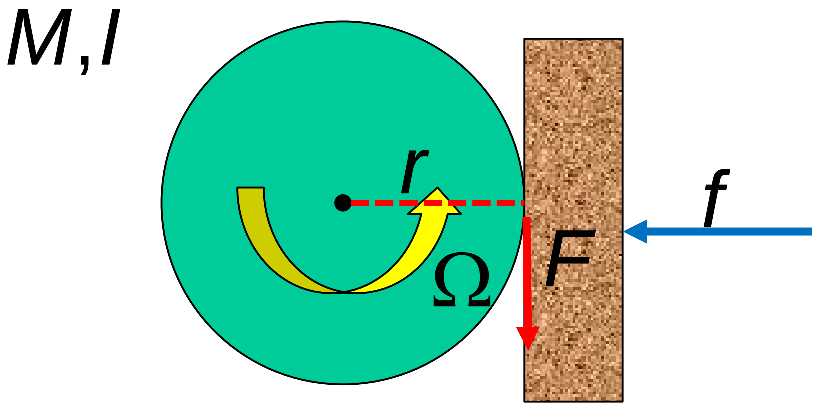
時刻　t　に
ここで停止



s の距離だけ円板
の周が動いた

$$s = r\phi$$

$$t = 0$$



3）この円板に板を力fで押し付けた。動摩擦係数をμとする。
円板が止まるまでどれだけ回転したか，運動方程式を用いて答えよ。

運動方程式

$$N = I\alpha \Rightarrow -(\mu f)r = I\alpha$$

「ブレーキ」なのでマイナス

等加速度運動の式を使う (p.29)

$$v = at + v_0 \qquad x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$\omega = \alpha t + \omega_0 \qquad \phi = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \phi_0$$

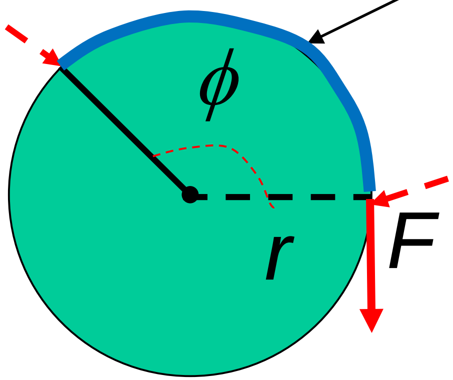
初期条件

$t = 0$

$\omega = \Omega \quad \phi = 0$

時刻　t　に
ここで停止

s の距離だけ円板
の周が動いた



$t = 0$

$N = -r(\mu f)$

$s = r\phi$

$$\alpha = -\frac{r\mu f}{I}$$

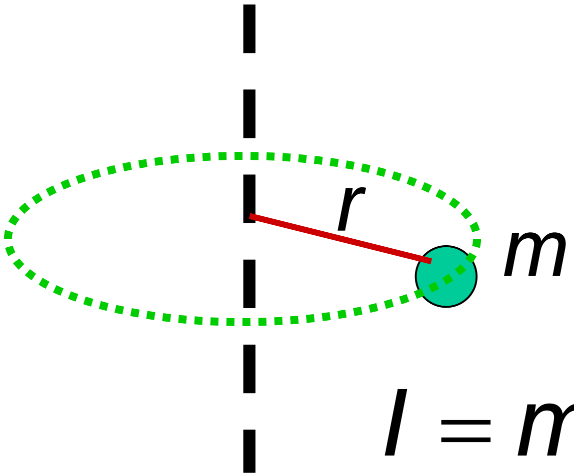
$\omega = \alpha t + \Omega$ ⇒ 停止した ⇒ $0 = \alpha t + \Omega$ ⇒ $t = -\dfrac{\Omega}{\alpha}$

$\phi = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \Omega t$ ⇒ そのときの回転角 ⇒ $\phi = \frac{1}{2}\alpha\left(-\dfrac{\Omega}{\alpha}\right)^2 + \Omega\left(-\dfrac{\Omega}{\alpha}\right)$

$$\boxed{\phi = -\frac{\Omega^2}{2\alpha} = \frac{I\Omega^2}{2r\mu f}}$$

慣性モーメント

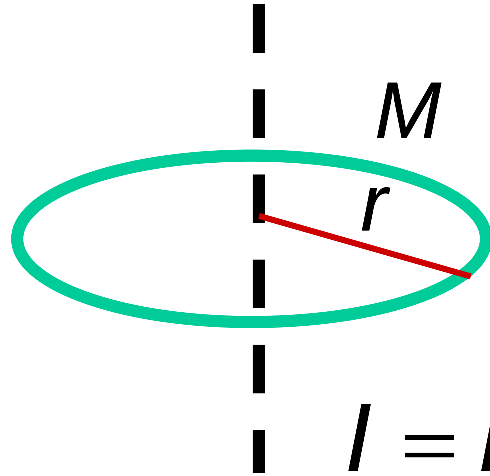
回転する質点



$$I = mr^2$$

回転軸

回転する円輪

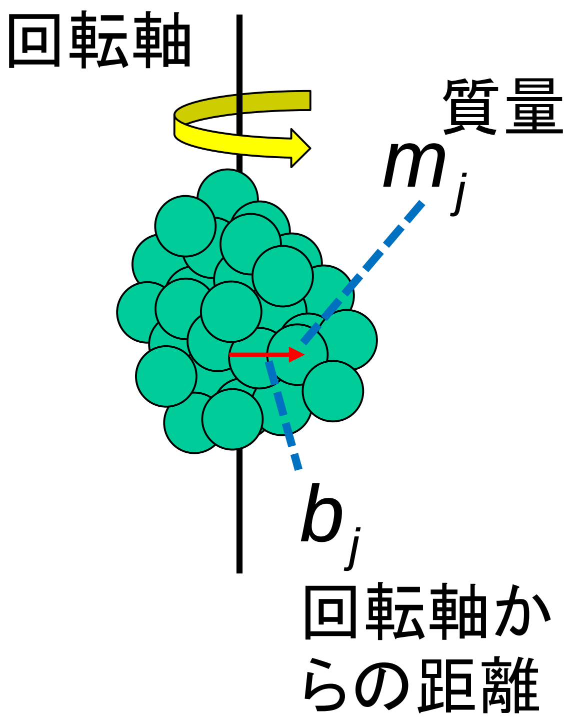


$$I = Mr^2$$

回転軸

剛体の慣性モーメント

剛体＝多数の質点の集まり



$$I = \sum m_j b_j^2$$

慣性モーメントは剛体と回転軸で決まる量

~~問題　次の剛体の慣性モーメントを求めよ~~

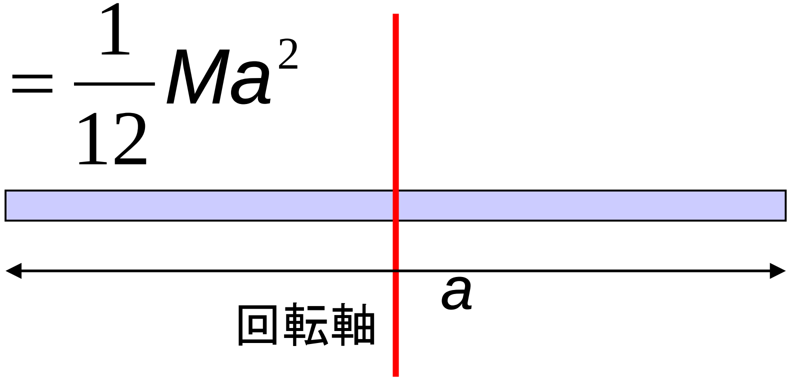
解答不能

基本的な立体の慣性モーメント(1)

一様な剛体，質量M，重心を通る軸　(p.92)

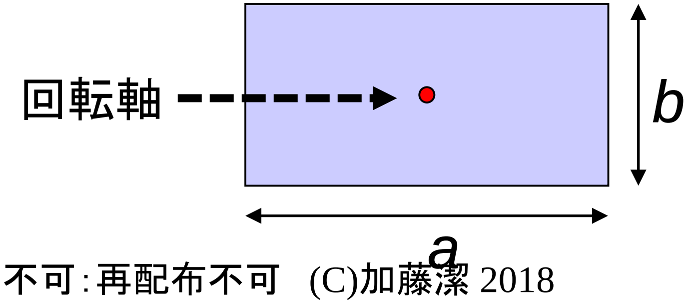
長さ a の棒

$$I = \frac{1}{12} M a^2$$



辺 a,b の長方形の板，あるいは直方体

$$I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

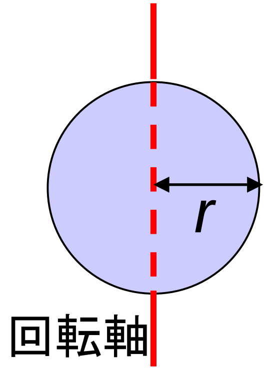


基本的な立体の慣性モーメント（2）

一様な剛体，質量M，重心を通る軸　（p.92)

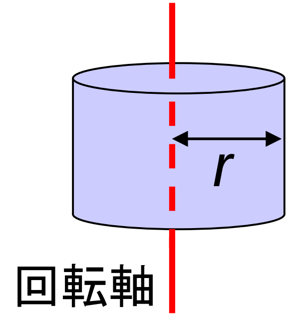
半径 r の球

$$I=\frac{2}{5}Mr^2$$



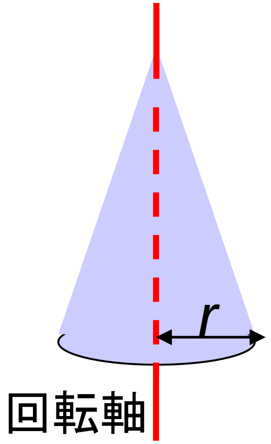
半径 r の円板，
円柱

$$I=\frac{1}{2}Mr^2$$



半径 r の円錐

$$I=\frac{3}{10}Mr^2$$

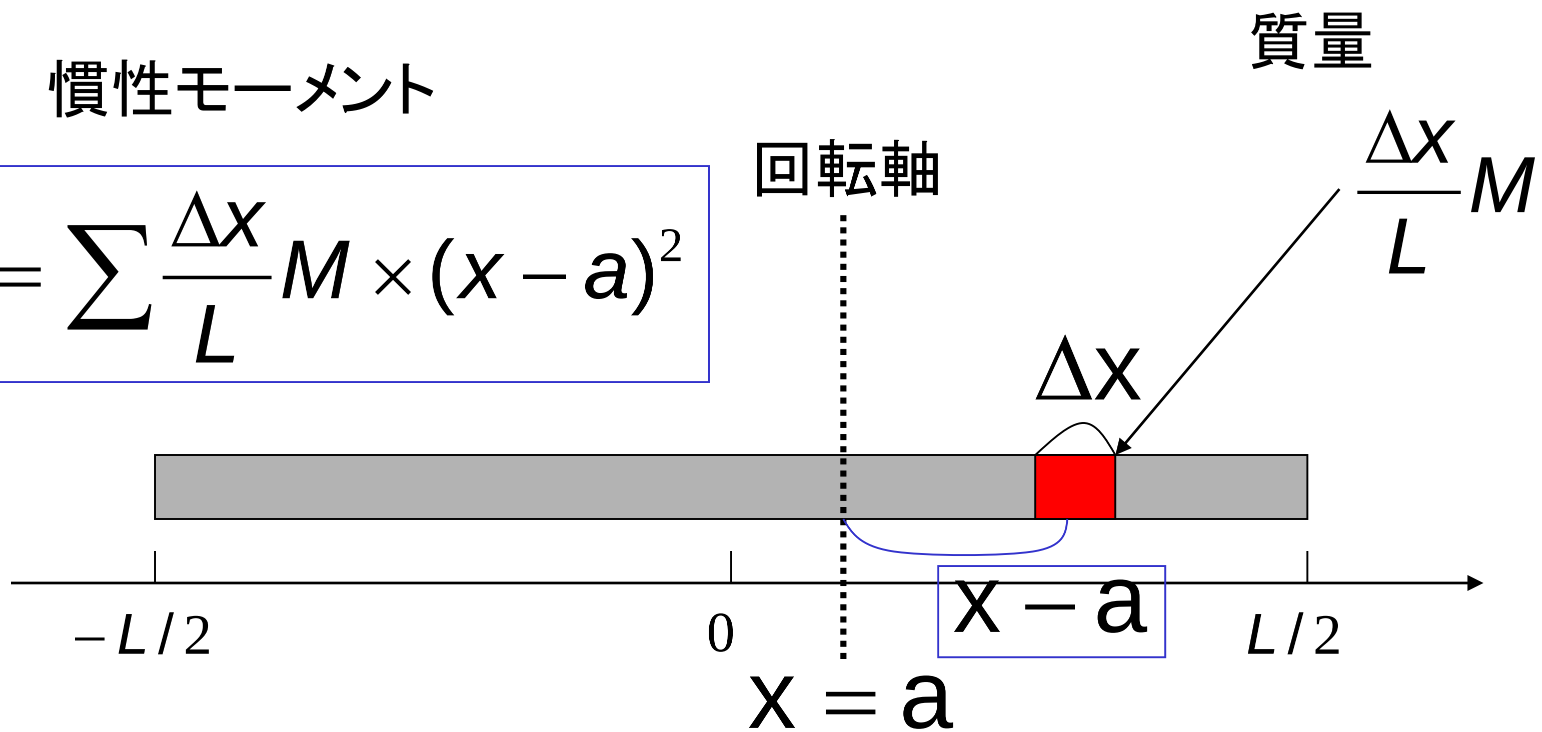


慣性モーメント：具体例

質量 M, 長さ L の一様な棒

慣性モーメント

$$I = \sum \frac{\Delta x}{L} M \times (x-a)^2$$



慣性モーメント

$$\boxed{I=\sum\frac{\Delta x}{L}M\times(x-a)^2}$$

分割和から積分へ

（p.16：基本パターン）

$$I=\int_{-L/2}^{L/2}\frac{M}{L}(x-a)^2dx$$

$$=\frac{1}{12}ML^2+Ma^2$$

結果の解釈

重心のまわり
(a=0 のとき) の
慣性モーメント

$$I_G=\frac{1}{12}ML^2$$

左の結果

$$I=I_G+Ma^2$$

a は重心
からの距離

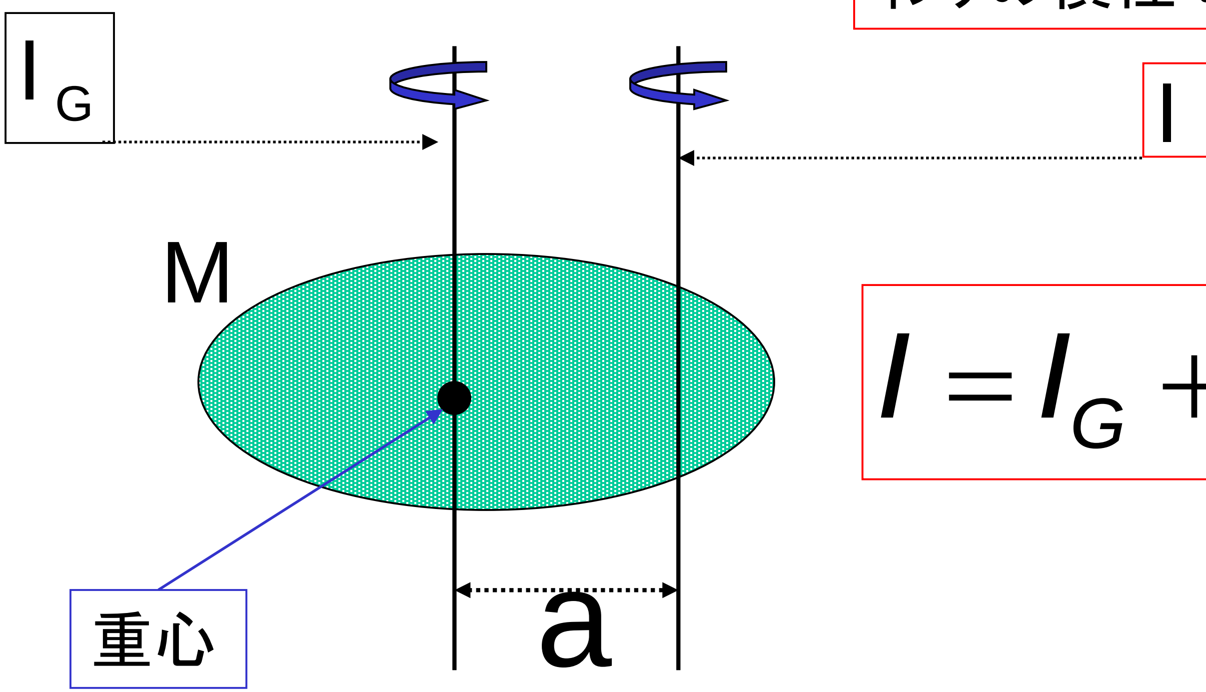
一般化

平行軸の定理

平行軸の定理

重心を通る軸のまわりの慣性モーメント

それに平行な軸のまわりの慣性モーメント

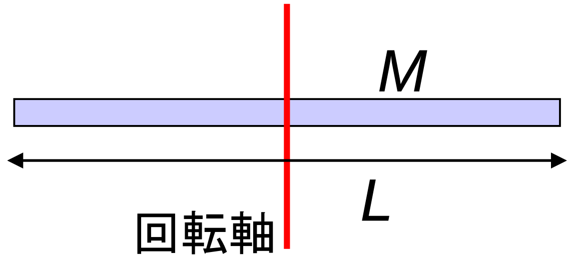


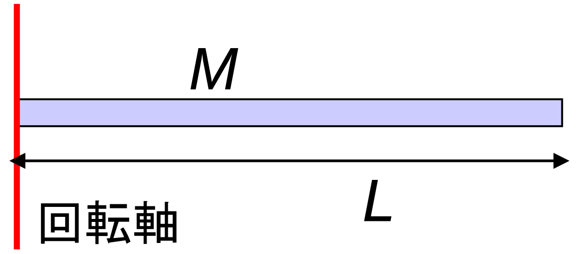
$$I = I_G + Ma^2$$

練習—2

一様な細い棒がある。
この棒に垂直で棒の中心を通る回転軸のまわりに
ある角速度で棒が回転しているときのエネルギーを E_1,
この棒に垂直で棒の一端を通る回転軸のまわりに
同じ角速度で棒が回転しているときのエネルギーを E_2とする。
E_2 は E_1 の何倍か。

質量を M，長さを L，角速度を ω とする。

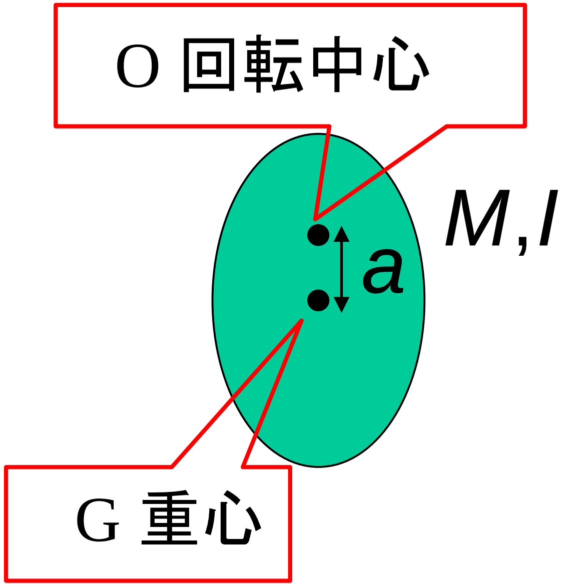


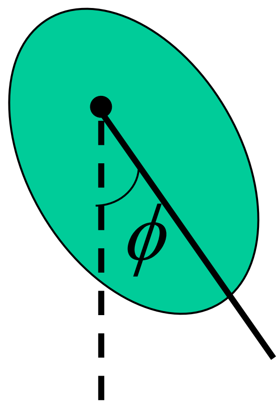


練習—3

質量M, 重心Gのまわりの慣性モーメントがIの板状の剛体が，図のように，鉛直面内にあって，重心Gからの距離がaの点Oで位置を固定されているが，この剛体は点Oを中心として自由に鉛直面内で回転できる(実体振り子)。重力加速度の大きさはgとする。

回転運動の運動方程式を書き，角度ϕが微小であるという近似のもとで，この実体振り子の振動の周期を答えよ。





練習

辺の長さが a で質量が M の一様な正方形がある。正方形の面に垂直で，その1つの頂点をとおる回転軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。