物理学C

慣性モーメント（つづき）

慣性モーメント（復習）

- 剛体の運動　並進運動＋回転運動
- 質量:「並進運動」での動かしやすさ，動かしにくさ
- 「回転運動」での動かしやすさ，動かしにくく
  ⇒ 剛体の慣性モーメント I
  ⇒ 剛体の形や構造を力学的に記述

剛体の運動の対応(p.82表5.1)

並進運動				回転運動	
質量	m	⟷	I	慣性モーメント
運動量	$p = mv$	⟷	$L = I\omega$	角運動量
運動方程式	$F = ma$	⟷	$N = I\alpha$	運動方程式
運動エネルギー	$\frac{1}{2}mv^2$	⟷	$\frac{1}{2}I\omega^2$	運動エネルギー

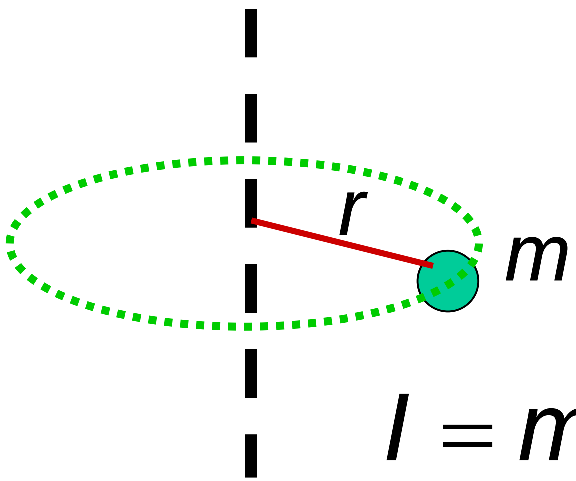
$$v = \frac{dx}{dt} \quad a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \quad \alpha = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

角速度　角加速度

慣性モーメント（復習）

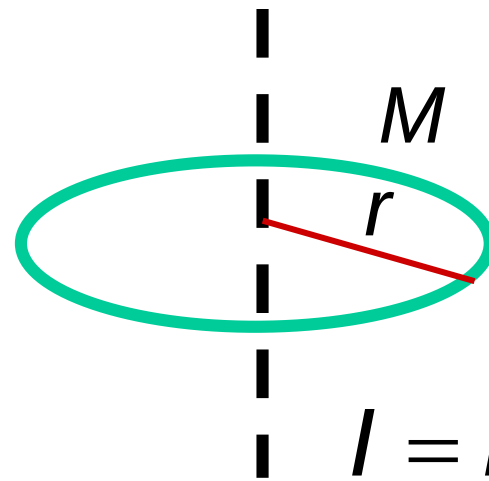
回転する質点



$$I = mr^2$$

回転軸

回転する円輪



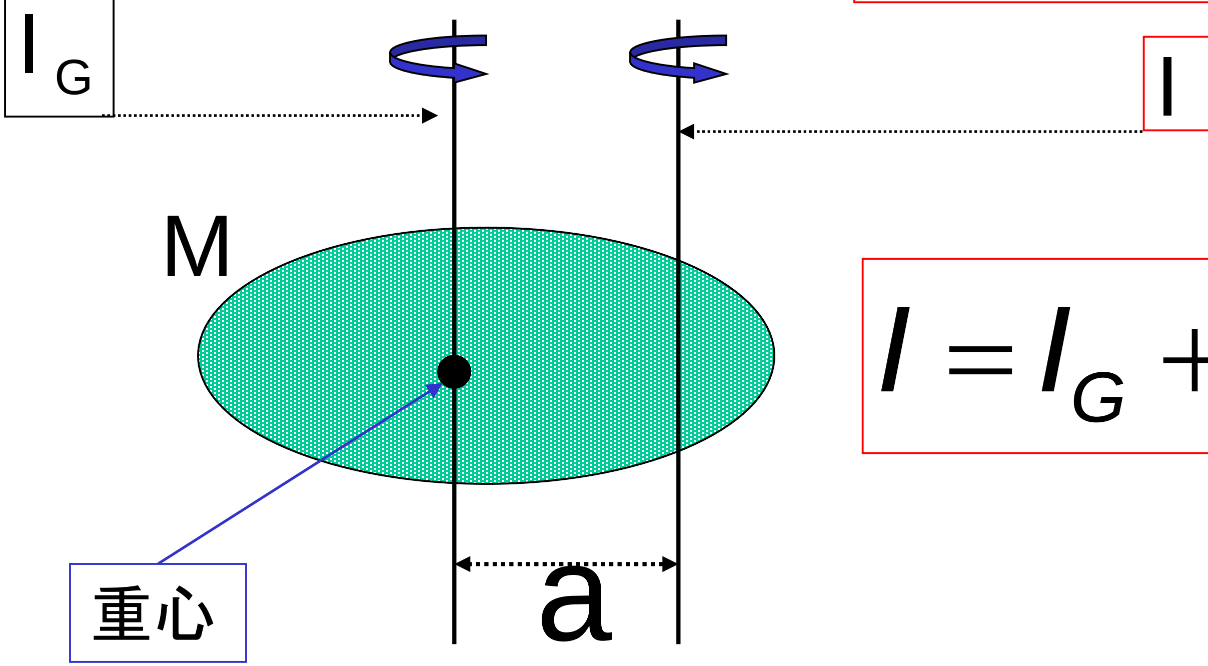
$$I = Mr^2$$

回転軸

平行軸の定理（復習）

重心を通る軸のまわりの慣性モーメント

それに平行な軸のまわりの慣性モーメント



$$I = I_G + Ma^2$$

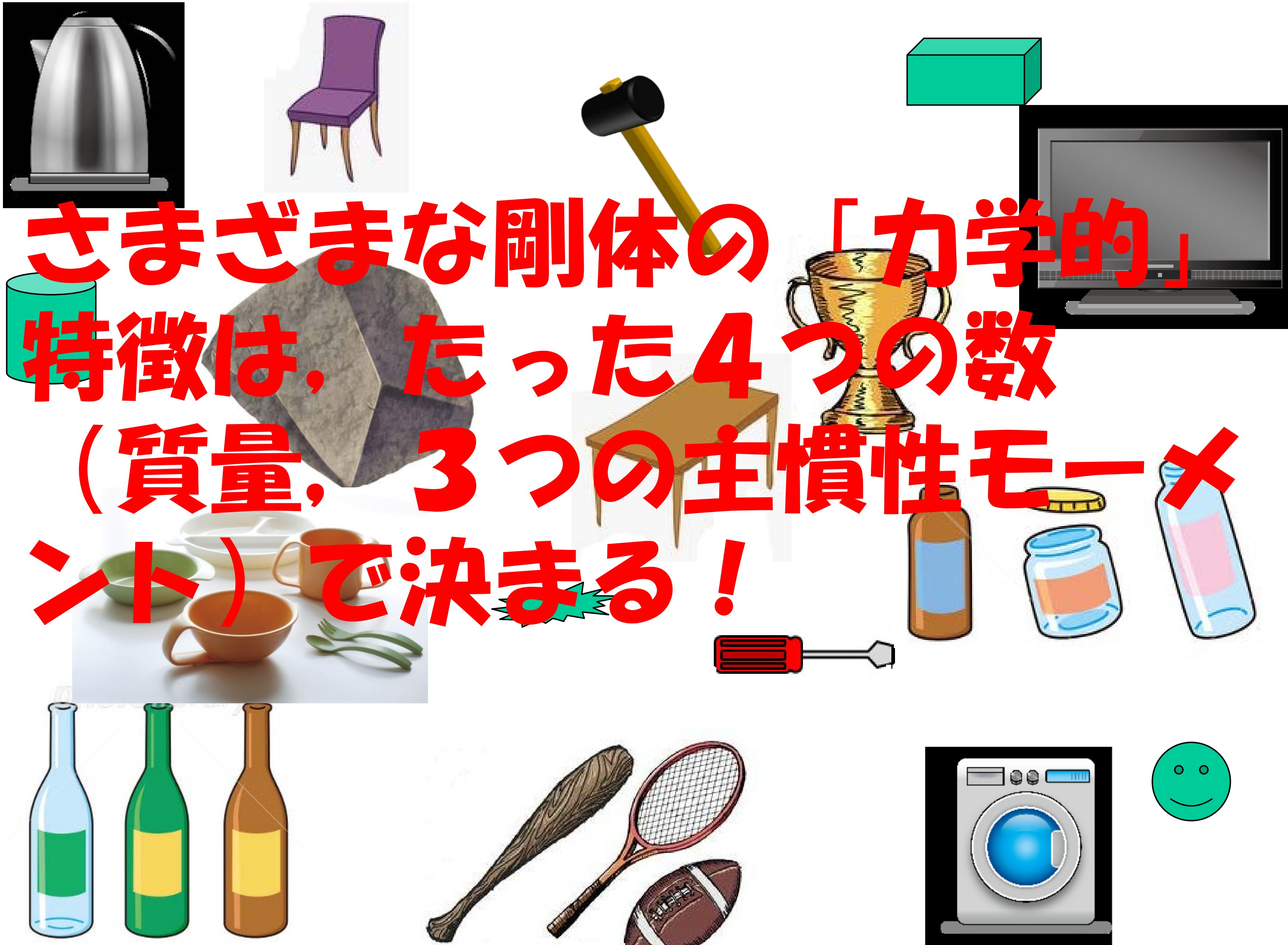
慣性モーメント：一般論

慣性モーメントはいくつあるのか？無数？

1）重心を通らない回転軸の I は，重心を通る平行な軸に関する I から決まる。(p.83-84:平行軸の定理）

2）重心を通る任意の軸に関する I は3つの主慣性モーメントから決まる。（5.1.4節：慣性テンソル）

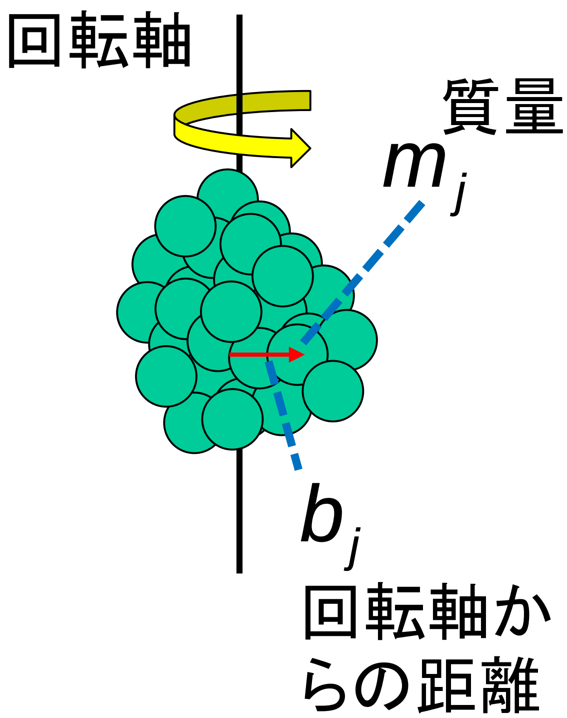
→ 以下で説明



さまざまな剛体の「力学的」特徴は，たった４つの数（質量，３つの主慣性モーメント）で決まる！

剛体の慣性モーメント

剛体＝多数の質点の集まり



$$I = \sum m_j b_j^2$$

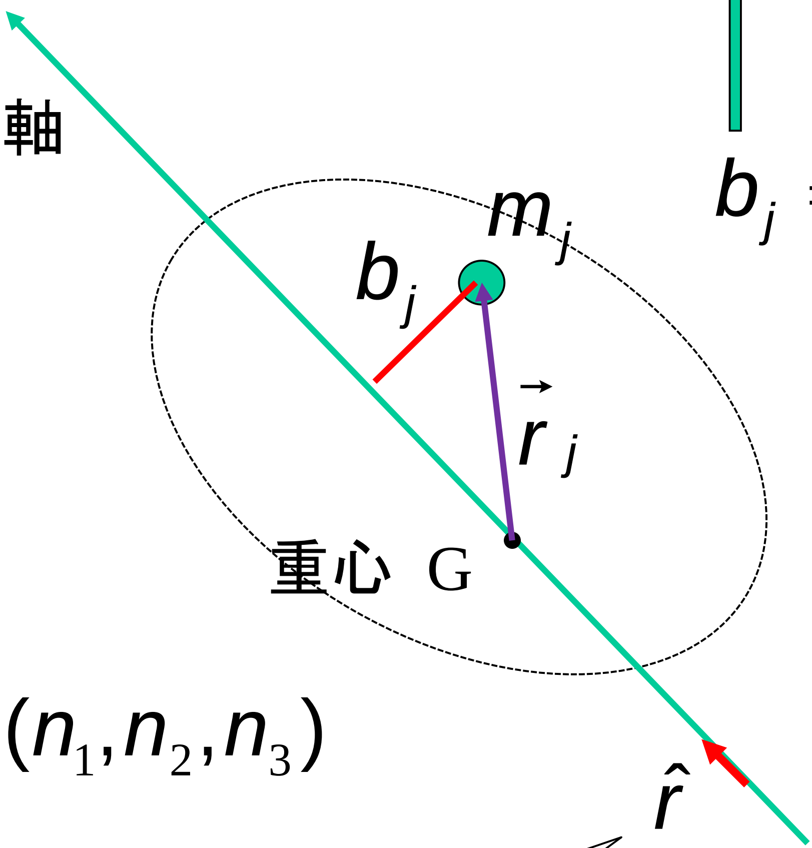
慣性モーメントは剛体と回転軸で決まる量

$$I = \sum m_j b_j^2$$

代入して計算する (p.93)

$$b_j = \left| \vec{r}_j - (\vec{r}_j \cdot \hat{r})\hat{r} \right|$$

$$\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$$



結果 $I = {}^t\hat{r} J \hat{r}$

J は慣性テンソル

$$\hat{r} = (n_1, n_2, n_3)$$

$\hat{r}$ 回転軸の方向を表す単位ベクトル

計算の詳細 p.93

$$b_j = \left| \vec{r}_j - (\vec{r}_j \cdot \hat{r})\hat{r} \right|$$

このb_j の2乗を求める。内積＝絶対値の2乗

$$b_j^{\,2} = \left(\vec{r}_j - (\vec{r}_j \cdot \hat{r})\hat{r} \right) \cdot \left(\vec{r}_j - (\vec{r}_j \cdot \hat{r})\hat{r} \right)$$

展開する

$$b_j^{\,2} = \vec{r}_j \cdot \vec{r}_j - 2(\vec{r}_j \cdot \hat{r})(\vec{r}_j \cdot \hat{r}) + (\vec{r}_j \cdot \hat{r})^2 \hat{r} \cdot \hat{r}$$

$\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$ を使う

$$b_j^{\,2} = (\vec{r}_j \cdot \vec{r}_j)(\hat{r} \cdot \hat{r}) - (\vec{r}_j \cdot \hat{r})(\vec{r}_j \cdot \hat{r})$$

行列で表現する

$$\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$$

$$\hat{r} = (n_1, n_2, n_3)$$

$$b_j^{\ 2} = (\vec{r}_j \cdot \vec{r}_j)(\hat{r} \cdot \hat{r}) - (\vec{r}_j \cdot \hat{r})(\vec{r}_j \cdot \hat{r})$$

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\vec{r}_j|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |\vec{r}_j|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\vec{r}_j|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j x_j & x_j y_j & x_j z_j \\ y_j x_j & y_j y_j & y_j z_j \\ z_j x_j & z_j y_j & z_j z_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_j \cdot \vec{r}_j = |\vec{r}_j|^2 = x_j^{\ 2} + y_j^{\ 2} + z_j^{\ 2}$$

$$b_j^{\ 2} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_j^2 + z_j^2 & -x_j y_j & -x_j z_j \\ -y_j x_j & x_j^2 + z_j^2 & -y_j z_j \\ -z_j x_j & -z_j y_j & x_j^2 + y_j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

慣性テンソルによるIの表現

$$I = \sum m_j b_j^2$$

に b_j^2 を代入する。和は剛体を構成する要素を全部加えることである。

$$\Downarrow$$

$$I = \hat{r} J \, {}^t\hat{r}$$

$$J = \begin{pmatrix} \sum m_j (y_j^2 + z_j^2) & -\sum m_j x_j y_j & -\sum m_j x_j z_j \\ -\sum m_j x_j y_j & \sum m_j (x_j^2 + z_j^2) & -\sum m_j y_j z_j \\ -\sum m_j x_j z_j & -\sum m_j y_j z_j & \sum m_j (x_j^2 + y_j^2) \end{pmatrix}$$

教科書 p.93 (5.38)

3行3列の実対称行列

慣性テンソル

- 重心を通る一般的な回転軸の周りの慣性モーメント:
  慣性テンソル（3行3列の行列）と回転軸の単位方向ベクトルで記述される。
- 数学（線形代数D）：直交行列（座標変換）により実対称行列は「対角化」される。
- 慣性主軸と3つの主慣性モーメント（固有値）で記述される。

数学（線形代数D）：直交行列により実対称行列は「対角化」される。

O　　3行3列の直交行列

適切なOを選ぶと

$$OJ\,{}^tO = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

主慣性モーメント I_1, I_2, I_3

これは，回転変換された座標系でみると慣性テンソルが対角化されるという意味

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

x', y', z' 軸

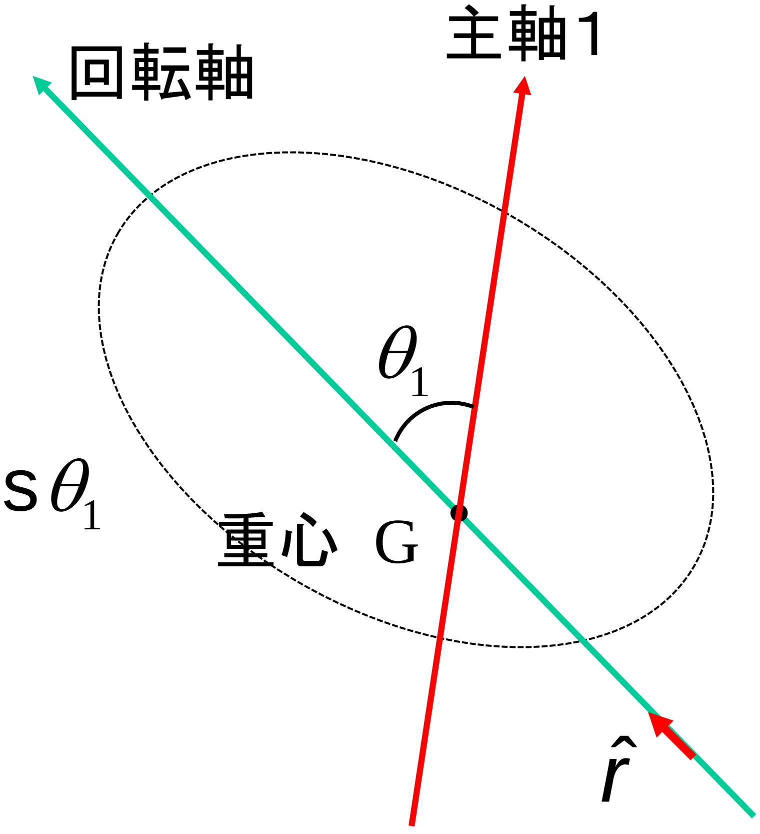
剛体に固定された慣性主軸

元の空間座標

主軸の座標系では

$$I = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$= n_1^2 I_1 + n_2^2 I_2 + n_3^2 I_3$$



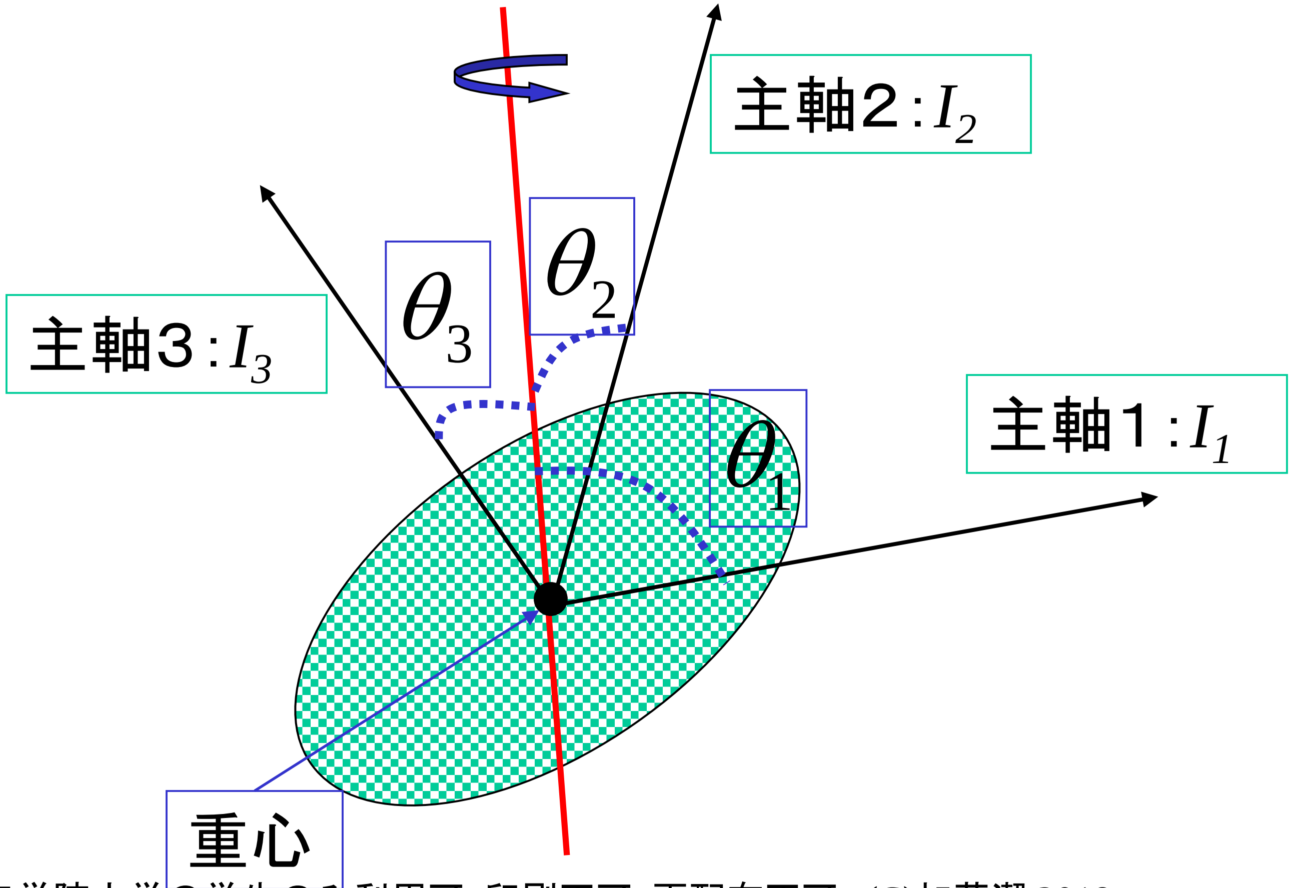
$$n_1 = \cos\theta_1$$

$$\hat{r} = (n_1, n_2, n_3)$$

単位ベクトル
回転軸の方向余弦

慣性テンソル

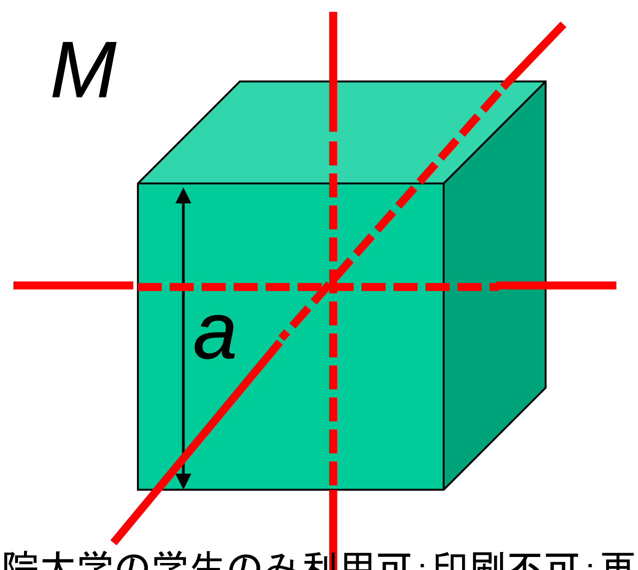
$$I = \cos^2\theta_1 I_1 + \cos^2\theta_2 I_2 + \cos^2\theta_3 I_3$$



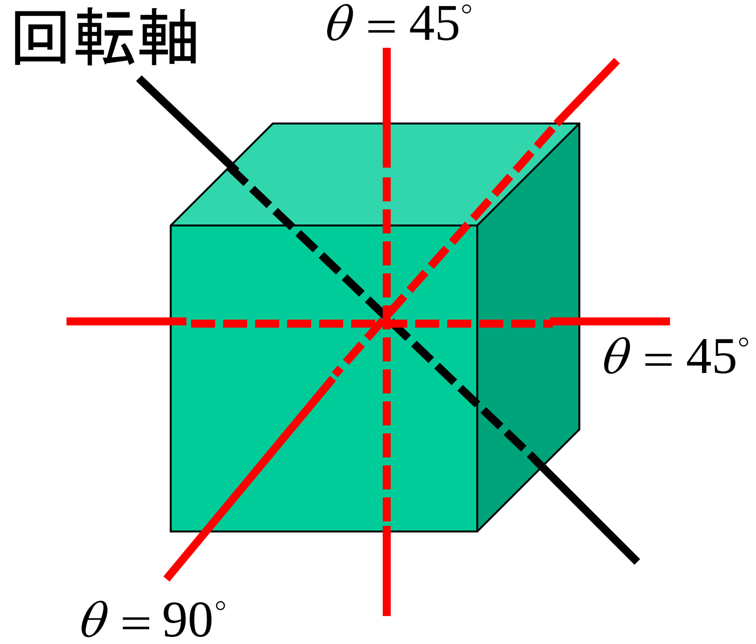
公式の使い方(例)

立方体の慣性主軸は対称性から，面の中心を通る3本の直交する軸

個々の慣性モーメントは $I_1 = I_2 = I_3 = \dfrac{1}{6}Ma^2$



（3）

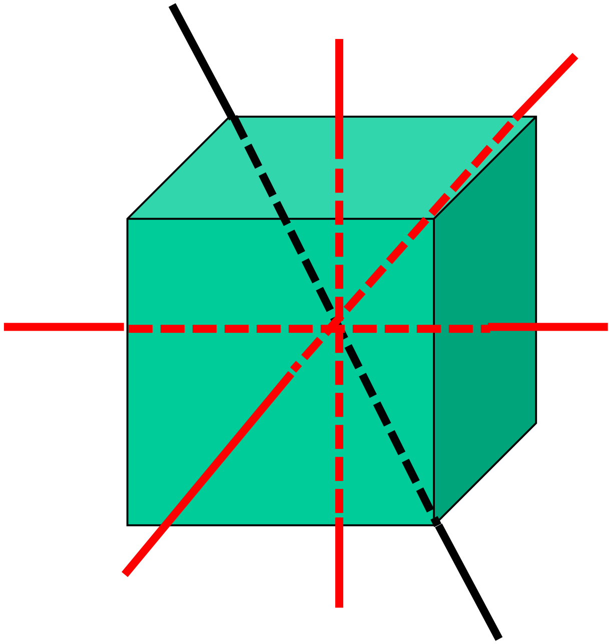


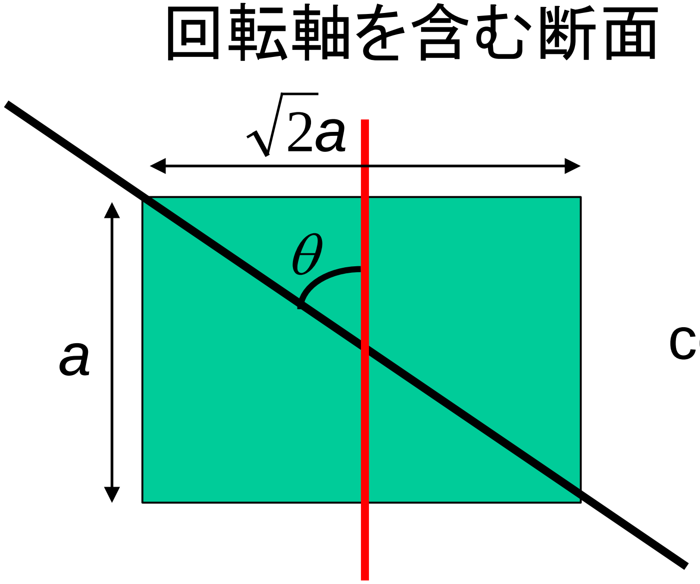
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$I = \cos^2\theta_1 I_1 + \cos^2\theta_2 I_2 + \cos^2\theta_3 I_3$$

$$I = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{6}Ma^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{6}Ma^2 + 0 \cdot \frac{1}{6}Ma^2 \quad = \frac{1}{6}Ma^2$$

（4）





$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$I = \cos^2\theta_1 I_1 + \cos^2\theta_2 I_2 + \cos^2\theta_3 I_3$$

$$I = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{1}{6}Ma^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{1}{6}Ma^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{1}{6}Ma^2 \quad = \frac{1}{6}Ma^2$$

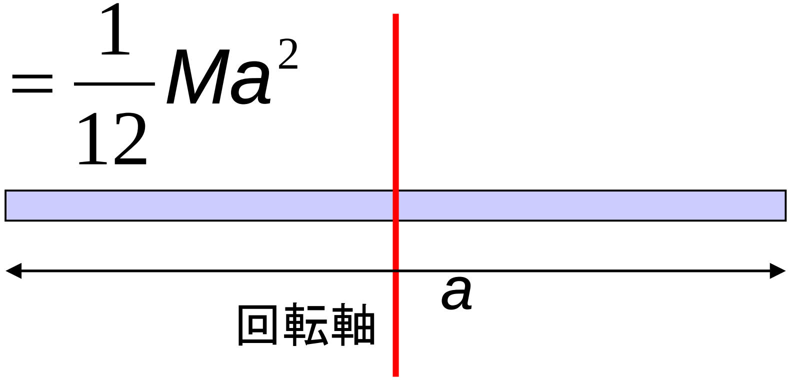
前回の復習

基本的な立体の慣性モーメント(1)

一様な剛体，質量M，重心を通る軸　(p.92)

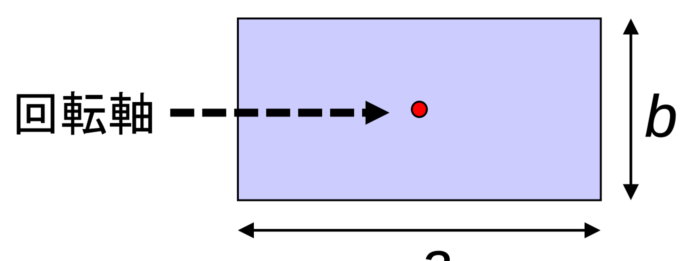
長さ a の棒

$$I = \frac{1}{12} M a^2$$



辺 a,b の長方形の板，あるいは直方体

$$I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$



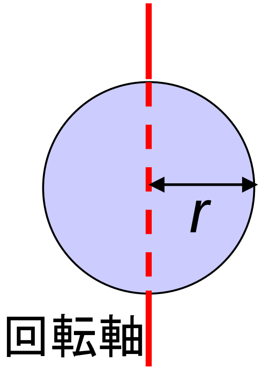
前回の復習

基本的な立体の慣性モーメント(2)

一様な剛体，質量M，重心を通る軸　(p.92)

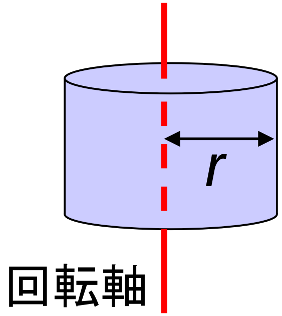
半径 r の球

$$I = \frac{2}{5} M r^2$$



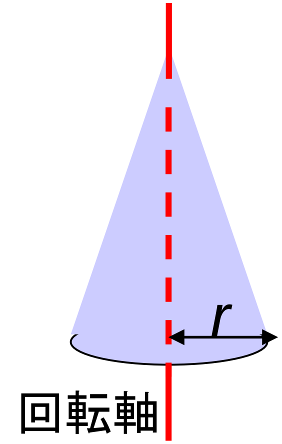
半径 r の円板，円柱

$$I = \frac{1}{2} M r^2$$



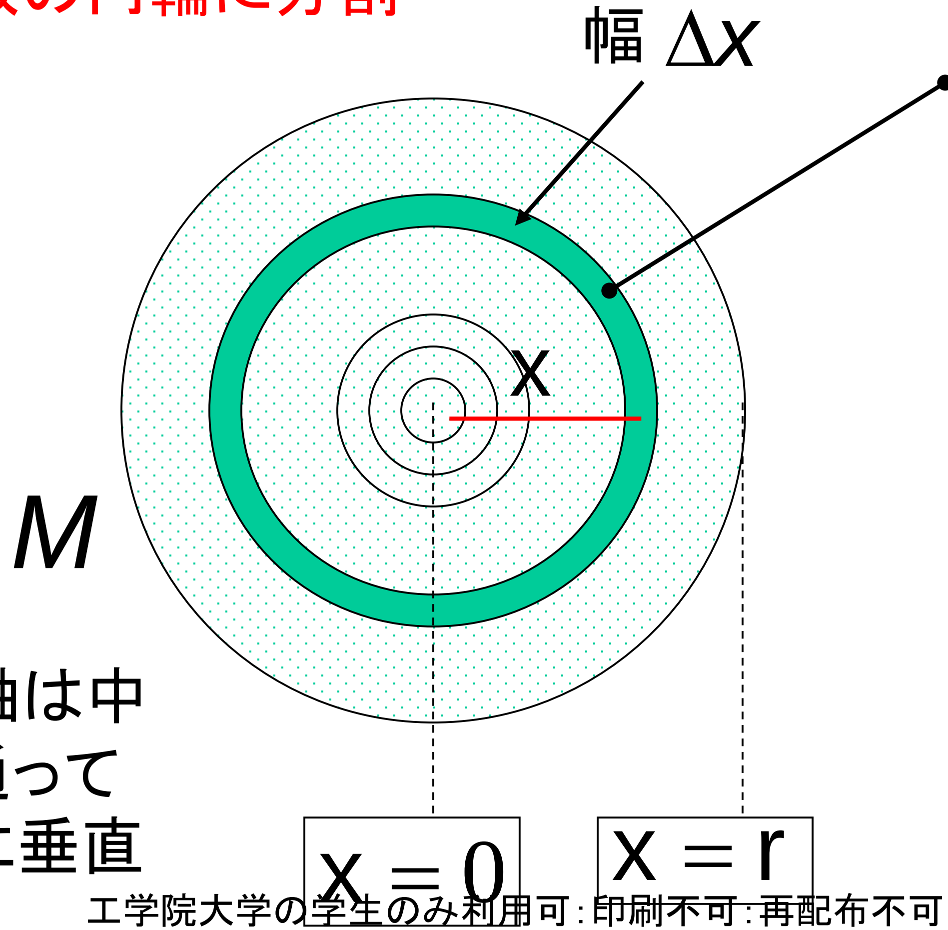
半径 r の円錐

$$I = \frac{3}{10} M r^2$$



円板，円柱　半径r

多数の円輪に分割



この部分の面積

$$2\pi x \cdot \Delta x$$

この部分の質量

$$\frac{2\pi x\,\Delta x}{\pi r^2}M$$

その慣性モーメント

$$\frac{2\pi x\,\Delta x}{\pi r^2}M \cdot x^2$$

回転軸は中心を通って円板に垂直

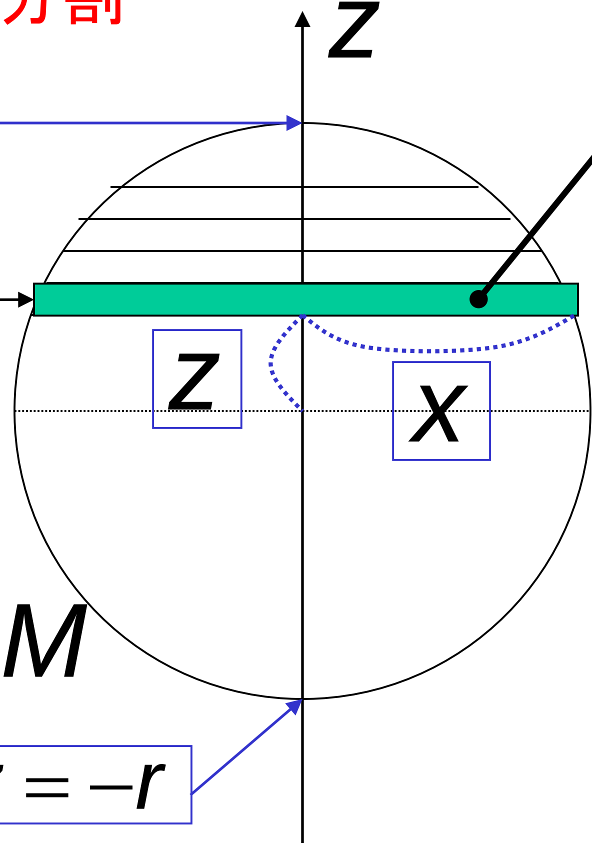
$$I = \sum \frac{2\cancel{\pi} x \Delta x}{\cancel{\pi} r^2} M \cdot x^2$$

分割和から積分へ(p.16:基本パターン)

$$I = \int_0^r \frac{2M}{r^2} x^3 dx = \frac{2M}{r^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^r = \frac{1}{2} M r^2$$

球 半径r

多数の円板に分割



$z = r$

厚さΔz

$z = -r$

$$x = \sqrt{r^2 - z^2}$$

回転軸は
z 軸(中心を
通る)

この部分の体積

$$\pi x^2 \cdot \Delta z$$

この部分の質量

$$\frac{\pi x^2 \Delta z}{\frac{4}{3}\pi r^3} M$$

その慣性モーメント

$$\frac{1}{2} \frac{\pi x^2 \Delta z}{\frac{4}{3}\pi r^3} M x^2$$

$$I = \sum \frac{1}{2} \frac{\cancel{\pi} x^2 \, \Delta z}{\frac{4}{3} \cancel{\pi} r^3} M \cdot x^2$$

分割和から積分へ(p.16:基本パターン)

$$I = \int_{-r}^{r} \frac{3M}{8r^3} x^4 dz$$

$$\boxed{x = \sqrt{r^2 - z^2}}$$

$$= \frac{3M}{8r^3} \int_{-r}^{r} (r^2 - z^2)^2 dz = \frac{3M}{8r^3} \int_{-r}^{r} (r^4 - 2r^2 z^2 + z^4) dz$$

$$= \frac{3M}{8r^3} \left[r^4 z - \frac{2r^2 z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right]_{-r}^{r} = \frac{3M}{8r^3} \left(r^5 - \frac{2r^5}{3} + \frac{r^5}{5} \right) \times 2$$

$$= \frac{3M}{8r^3} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) \times r^5 \times 2 \quad = \frac{2}{5} M r^2$$