物理学C

剛体の運動

剛体の運動方程式

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

剛体の並進運動
を記述

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

剛体の回転運動
を記述

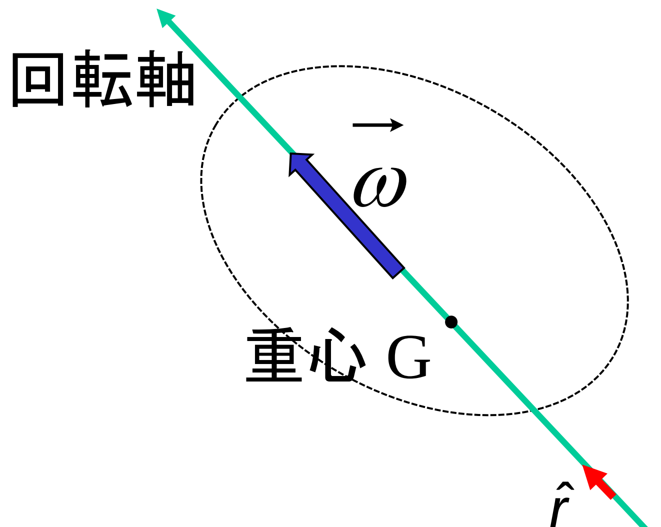
速度と角速度

$$v = \text{速度} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}$$

$\vec{v}$ 速度ベクトル
大きさ v
向き　運動方向

$$\omega = \text{角速度} = \frac{\text{回転角}}{\text{時間}}$$

$\vec{\omega}$ 角速度ベクトル
大きさ ω
向き　回転軸の方向（$\hat{r}$ 向き）



剛体の運動量と角運動量

$$\vec{P} = M\vec{V}$$

運動量　質量　重心の速度

速度を求めるのは質点の場合と同様

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

角運動量　慣性テンソル　角速度

角速度を求めるのは一般には容易ではない

座標系
- 通常の慣性系（空間に設定）
  慣性テンソル J は運動とともに変動
- 慣性主軸系（剛体に固定）
  慣性テンソル J は一定で主慣性モーメント3成分

オイラー方程式

慣性主軸系（剛体に固定された座標系）での回転運動の運動方程式

$$\begin{cases} I_1 \dfrac{d\omega_1}{dt} - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = N_1 \\ I_2 \dfrac{d\omega_2}{dt} - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = N_2 \\ I_3 \dfrac{d\omega_3}{dt} - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = N_3 \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

- 導出は省略
- 非線形方程式であり，一般的には難解
- 解いた後，元の座標に戻す

以下では，特殊な場合に限定して考える。

剛体の運動

- 回転軸の方向が一定の場合に限定しての扱い。
- 変数：重心の位置x, 重心のまわりの回転角ϕ

$$F = M\frac{d^2 x}{dt^2} \qquad N = I\frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

剛体の運動

$$F = M\frac{d^2x}{dt^2} \quad N = I\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

運動方程式

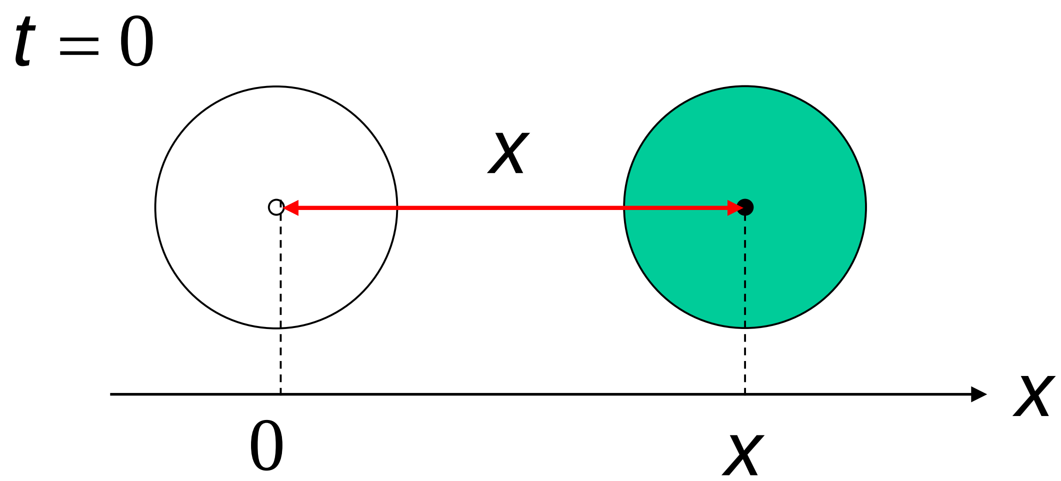
速度，角速度

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \omega = \frac{d\phi}{dt}$$

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

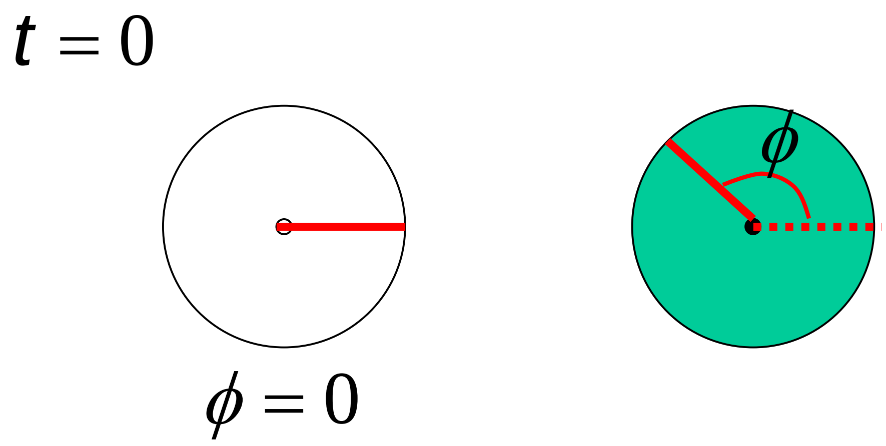
運動エネルギー

座標 x, ϕ



等速並進なら

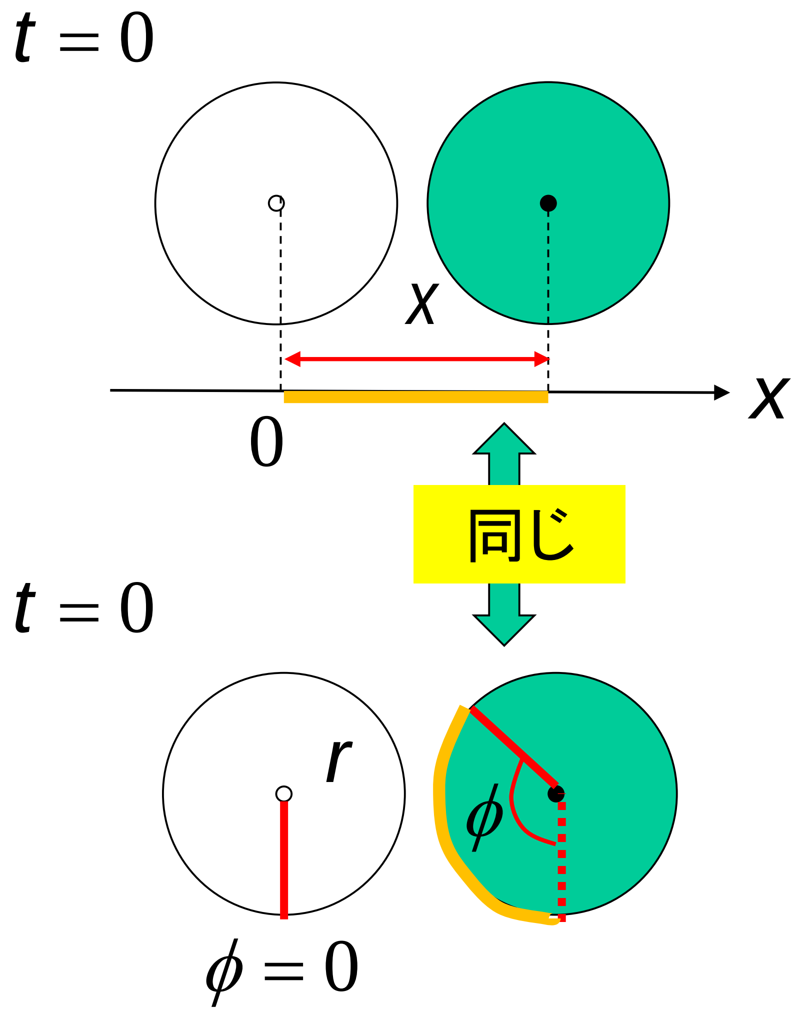
$$v = \frac{x}{t}$$



等速回転なら

$$\omega = \frac{\phi}{t}$$

すべらずに，ころがる(1)



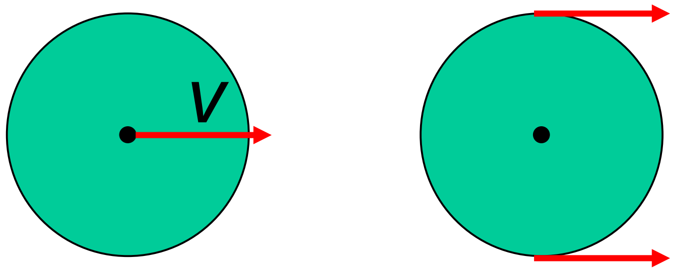
$$x = r\phi$$

時間で微分

$$v = r\omega$$

すべらずに，ころがる(2)

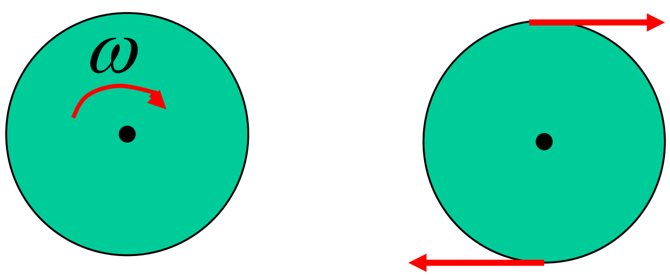
並進運動
速度 v

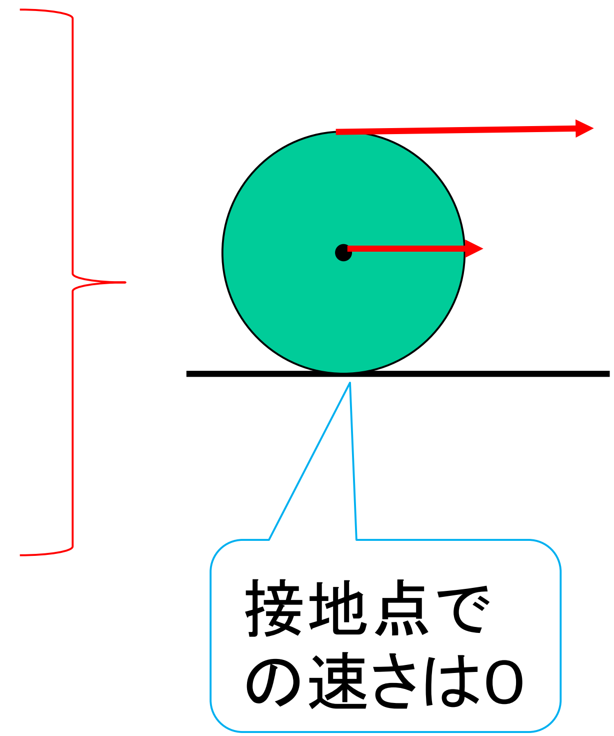


半径r

$$v = r\omega$$

回転運動
角速度ω

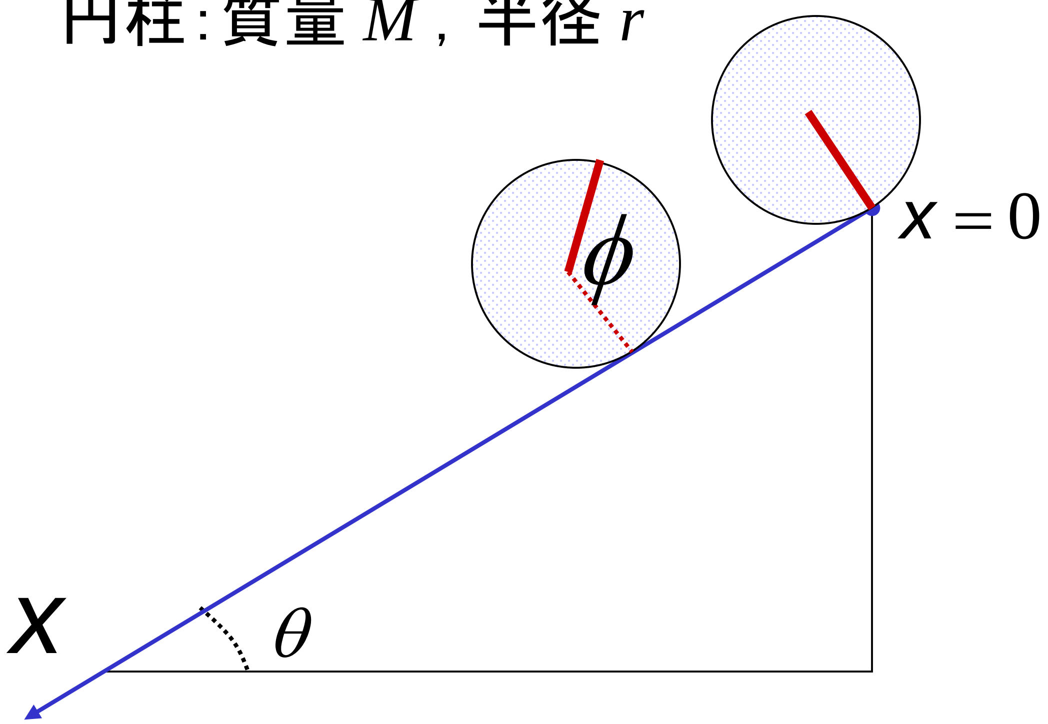




演習・斜面を滑らず転がる円柱

円柱：質量 M，半径 r

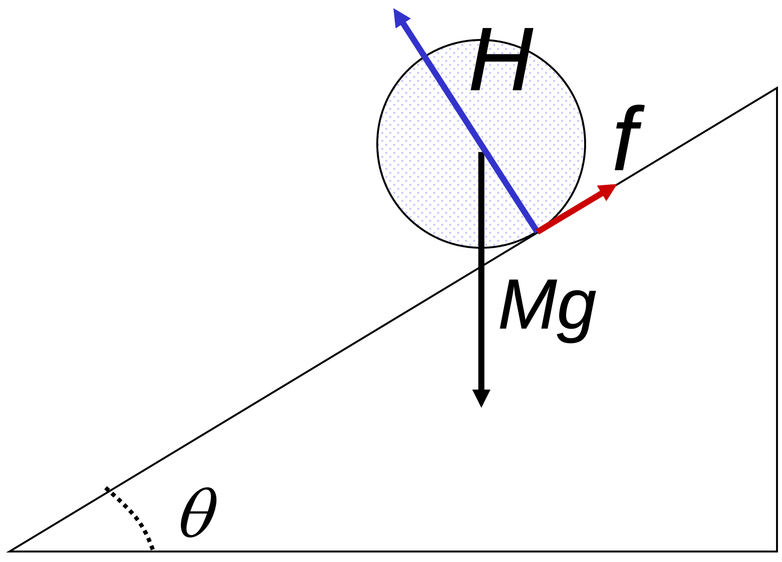
まず，座標を設定



滑らずに転げ落ちる

$$x = r\phi$$

円柱:質量 M, 半径 r



働く力を調べる。

→ 重力, 抗力, 摩擦力

運動方程式

$$F = M\frac{d^2x}{dt^2} \qquad N = I\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

x 軸方向に働く力 $F = Mg\sin\theta - f$

重心のまわりの力のモーメント $N = rf$

$$Mg\sin\theta - f = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$rf = I\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$x = r\phi$$

$$f = \frac{I}{r}\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{I}{r^2}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{M}{2}\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$I = \frac{1}{2}Mr^2$$

$$Mg\sin\theta = \left(M + \frac{M}{2}\right)\frac{d^2x}{dt^2}$$

加速度

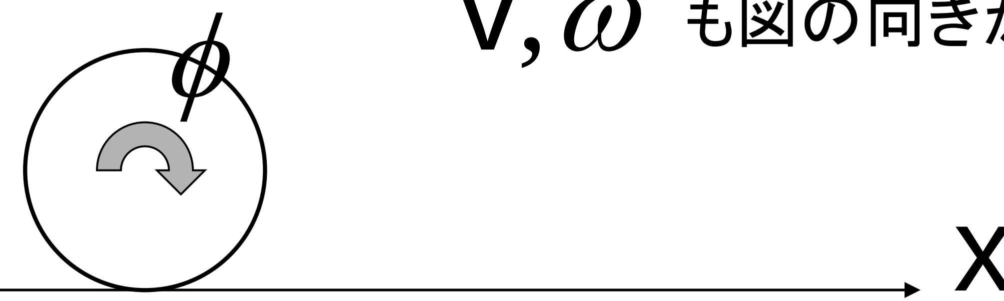
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

転がる球

球 M, r

$$I = \frac{2}{5}Mr^2$$

V, ω も図の向きが正

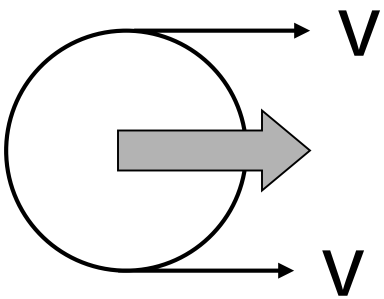


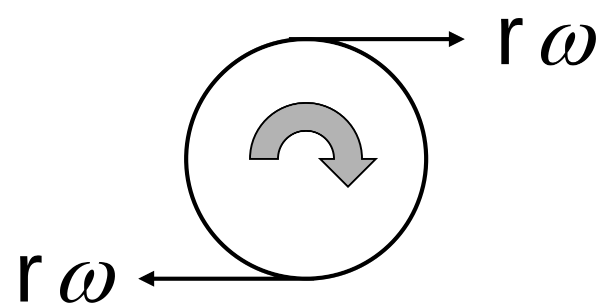
座標の定義

初期条件

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad v = v_0, \omega = \omega_0$$

並進運動の速度　　　　　　回転（自転）運動の速度





$\boxed{v - r\omega}$ は何を表すのか？

球の床面に接触する部分の床に対する速度を表す

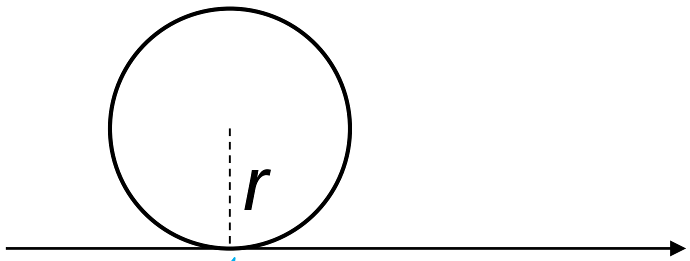
$\boxed{v - r\omega = 0}$ とは何を意味するのか？

接触部の速度0→「ころがっている」ことを意味する

（このとき，v とωの符号は同じ。）

運動方程式

$$M\frac{dv}{dt} = F \qquad I\frac{d\omega}{dt} = N$$



この点に
動摩擦力
が働く

大きさ

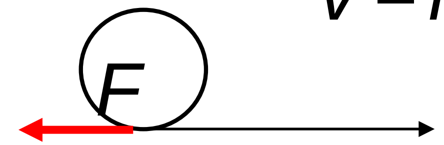
$$F = \mu Mg$$

大きさ

$$N = rF$$

球が右にすべる

$$v - r\omega > 0$$

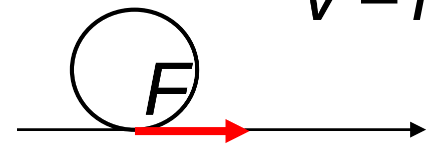


摩擦力左向き

$$F = -\mu Mg \qquad N = r\mu Mg$$

球が左にすべる

$$v - r\omega < 0$$



摩擦力右向き

$$F = \mu Mg \qquad N = -r\mu Mg$$

1）$v_0 - r\omega_0 = 0$ 球はすべらずに転がっており，そのまま同じ速度，角速度で運動する

2）$v_0 - r\omega_0 > 0$ $F = -\mu Mg \quad N = r\mu Mg$

$$v = -\mu gt + v_0 \qquad \omega = \tfrac{5}{2r}\mu gt + \omega_0$$

vは減り，ωは増え，ある時点で $v - r\omega = 0$ となり，あとは，1）と同じとなる。

3）$v - r\omega < 0$ $F = \mu Mg \quad N = -r\mu Mg$

$$v = \mu gt + v_0 \qquad \omega = -\tfrac{5}{2r}\mu gt + \omega_0$$

vは増え，ωは減り，ある時点で $v - r\omega = 0$ となり，あとは，1）と同じとなる。

2）, 3）

$$\begin{cases} v = v_0 \mp \mu g t \\ r\omega = r\omega_0 \pm \frac{5}{2}\mu g t \end{cases}$$

$t = t_c = \dfrac{2}{7}\dfrac{|v_0 - r\omega_0|}{\mu g}$ の時刻に $v - r\omega = 0$ となる

それ以降は一定速度で運動する。

そのときの一定速度

$$v = v_c = \frac{1}{7}(5v_0 + 2r\omega_0)$$

このv_cは
最初の加速度 ω_0
が負で大きいと
負になりうる

初期条件により各種のケースがある

$\boxed{\mathrm{V}}$ $\boxed{\mathrm{r}\,\omega}$