Maxwellの方程式と電磁波

電磁気その5

Maxwellの方程式

電磁気学の基礎方程式

J.C.Maxwell　～　１８６１ごろ完成

積分形の方程式…物理的意味が明解

微分形の方程式…数学的な操作が容易

Maxwell方程式の積分形（1）

空間内の任意の閉曲面Sについて

電場のガウスの法則

$$\sum_{S} D_n \Delta S = \sum_{S\text{の中}} q$$

磁場のガウスの法則

$$\sum_{S} B_n \Delta S = 0$$

Maxwell方程式の積分形（2）

空間内の任意の閉曲線Cとそれを縁とする面Sについて

アンペールの法則

$$\sum_{C} H_t \Delta s = \sum_{S} I + \sum_{S} \frac{dD_n}{dt} \Delta S$$

ファラデーの法則

$$-\sum_{C} E_t \Delta s = \sum_{S} \frac{dB_n}{dt} \Delta S$$

場の間の関係式

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

EとH… ＊荷に働く力

DとB… 力線

Maxwell 方程式の微分形

電荷密度 ρ

電流密度 $\vec{j}$

数学的操作の詳細
… **節** 9.12.1
ベクトル解析の記号
… **付録**A.7

$$div\vec{D} = \rho$$

$$div\vec{B} = 0$$

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$-rot\vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

電磁場という統一場

場は実在である

エネルギー密度

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \left|\vec{H}\right|^2$$

運動量密度（ポインティングベクトル）

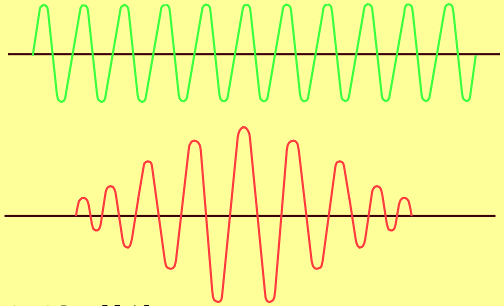
$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

電磁波

Maxwellの方程式の理論的帰結

- 電場と磁場が空間を波動として伝わる
- 横波である
- 電場と磁場は直交している
- 方程式の解によれば波の速度は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$



電磁波

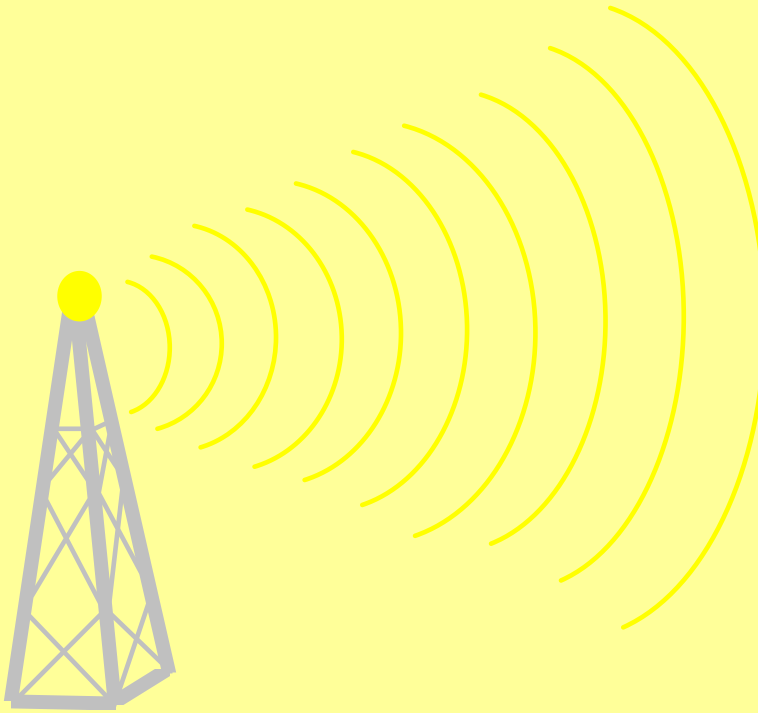
- Maxwellが1860年代に理論的に提示
- 1888年Hertzが実験的に検証

→　理論の正しさを検証

電磁場という統一場理論の完成

電磁波の分類

→テキスト p.179



長い

長波
中波
短波
超短波
マイクロ波
赤外線
可視光線
紫外線
X線
ガンマ線

波長

短い

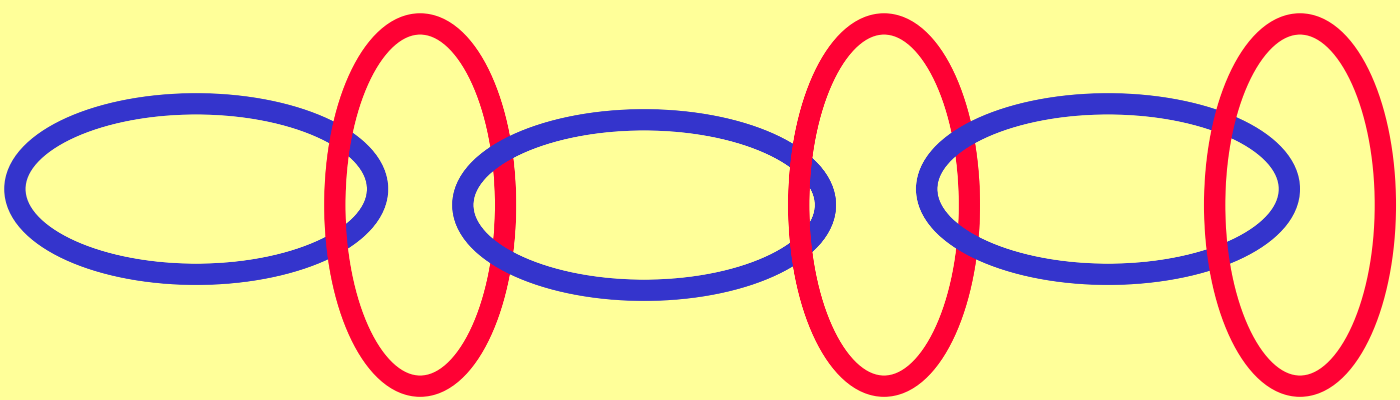
$$c = 3.0 \times 10^8 [m / s]$$

電磁波の伝播

Maxwell方程式

電場の変化→磁場　(アンペール：変位電流)

磁場の変化→電場　(ファラデー：電磁誘導)



数学的な扱い… 9.13.1節

微分形から積分形へ

閉曲面Sについて考えるとき

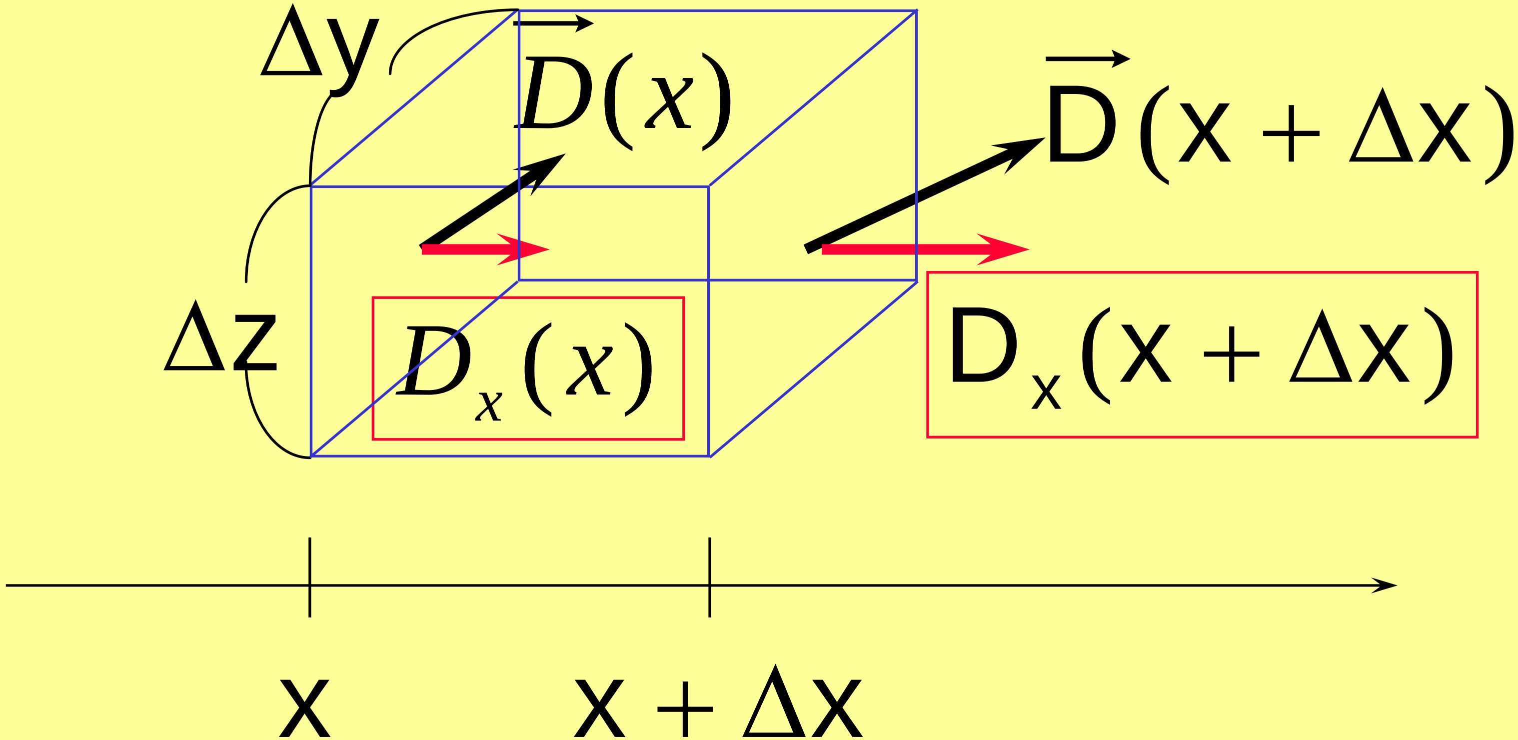
$$\sum \sim_n \Delta S \Rightarrow div \sim$$

のタイプの変換

→　微小な直方体をSとする

法線方向＝中から外向きを＋とする

微分形から積分形へ



$$D_x(x+\Delta x)\Delta y\Delta z - D_x(x)\Delta y\Delta z$$

微分形から積分形へ

$$\boxed{\sum_{S} D_n \Delta S = \sum_{S\text{の中}} q} \Rightarrow div\,\vec{D} = \rho$$

この式の左辺 （6つの面すべてを考える）
→ 式9.89

この式の右辺 （電荷密度ρを使って）

$$\rho(x, y, z) \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

直方体の体積

Maxwell方程式→波動

$$\rho = 0, \vec{j} = 0$$ の条件で方程式を解く。

(電波源や受信機を除く、途中の伝播の様子。)

→数学的操作→波動方程式　(E→Hも同様)

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}}$$

Maxwell方程式→波動

$$-\mathrm{rot}\,\vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

両辺の rot**をとる**

$$-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \mu_0 \mathrm{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

公式

$$\mathrm{rot} \cdot \mathrm{rot} = \mathrm{grad} \cdot \mathrm{div} - \Delta$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \;,\; \mathrm{rot}\,\vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$-\mathrm{grad} \cdot \mathrm{div}\,\vec{E} + \Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial\, \mathrm{rot}\,\vec{H}}{\partial t}$$