流体力学

6. ４運動方程式
6. ５粘性流体

運動方程式

- 流体の各部分に働く力と運動量の収支を式として表す

$$\frac{\partial(\tilde{n}\mathbf{v})}{\partial \mathbf{t}} + \mathbf{v}\frac{\partial(\tilde{n}\mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{f}$$

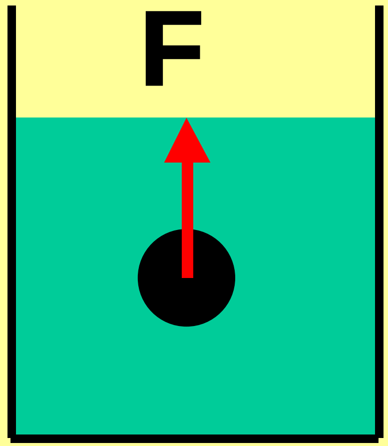
この式は非線形で難しい。

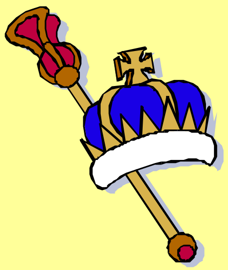
これから, 浮力の式やベルヌーイの定理が出る。

浮力

- アルキメデスの原理 :静止流体
  ρ＝流体密度,　*V*＝流体中の体積

$$F = r g V$$





- 浮力＝物体の表面にかかる圧力の合計
- (例)円柱形の物体　[問6．1]

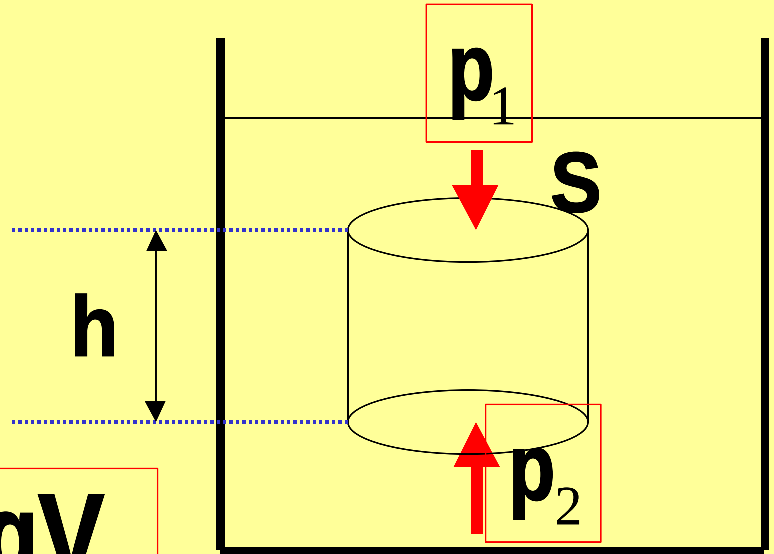
側面にかかる圧力→合計は０

下面と上面の圧力の差

$$F = p_2S - p_1S$$

$$= \rho ghS$$

$$\boxed{F = \rho gV}$$



ベルヌーイの定理

- 定常流, 非圧縮性

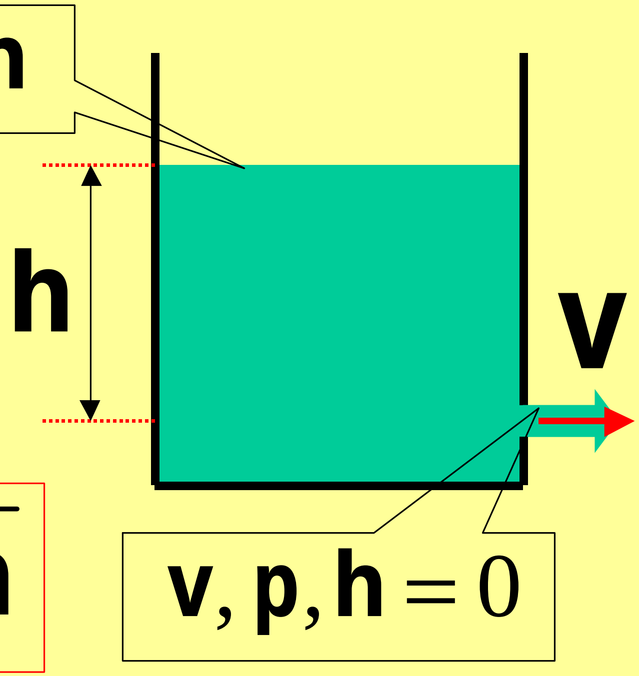
$$r\frac{\mathbf{v}^2}{2}+\mathbf{p}+r\mathbf{gh}=\text{一定}$$

トリチェリの定理　［問6．2］

- 容器から流出する流体の速度

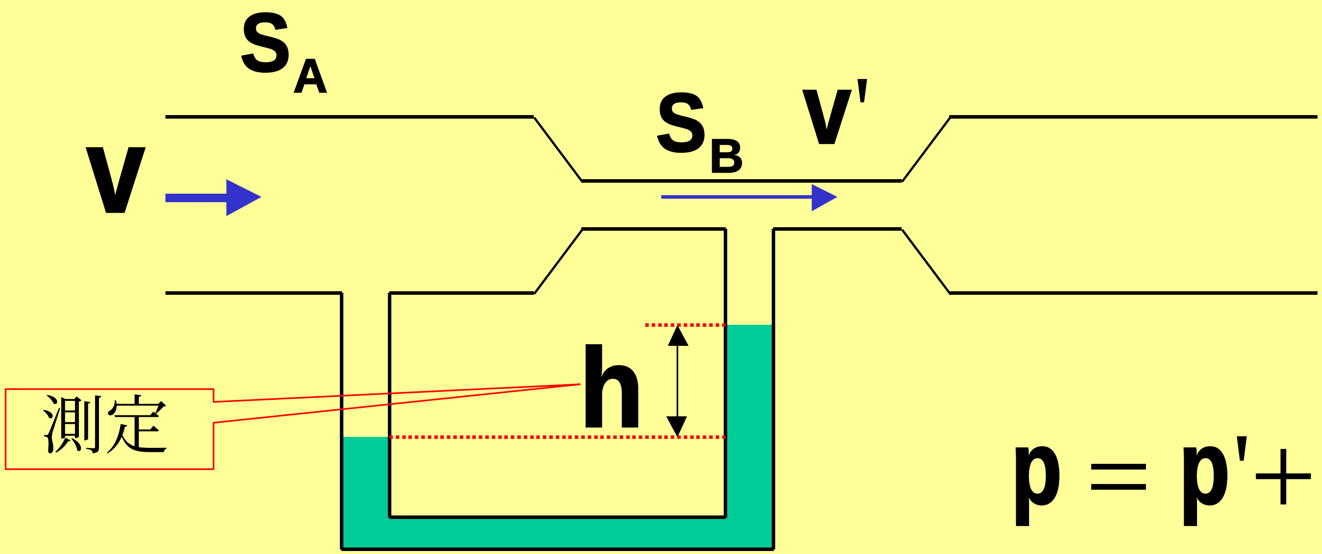
ベルヌーイの定理より

$$r\mathbf{g}\mathbf{h} = \frac{r}{2}\mathbf{v}^2$$



$$\boxed{\mathbf{v} = \sqrt{2\mathbf{g}\mathbf{h}}}$$

ベルヌーイの定理 :流速計



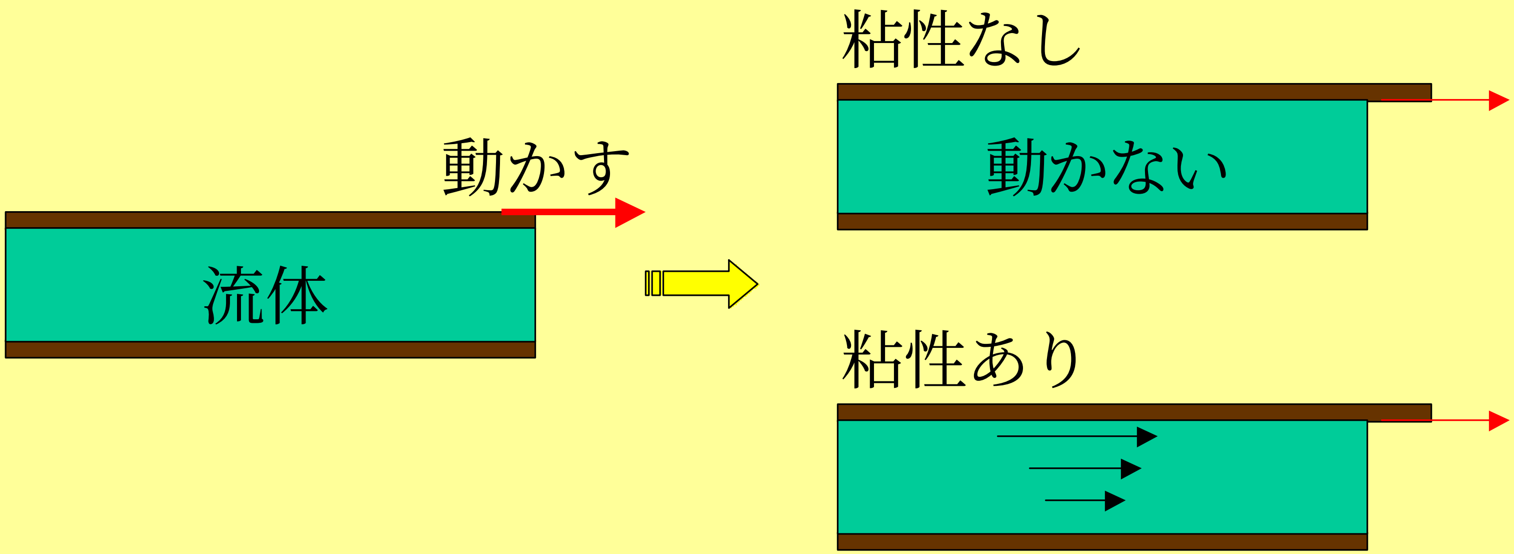
$$p = p' + rgh$$

$$S_A v = S_B v' \qquad \rho\frac{v^2}{2} + p = \rho\frac{v'^2}{2} + p'$$

これらの
式からv
が決まる

粘性流体

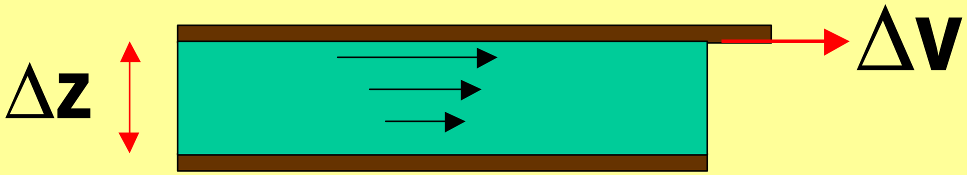
- 粘性：流体の各部分の間（あるいは器壁と流体の間）に働く摩擦力の大きさを表す

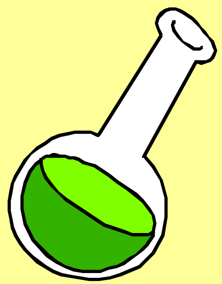


粘性流体

- 粘性率　η
  動粘性率　ν

$$\text{接線応力} = h \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta \mathbf{z}} \qquad n = \frac{h}{r}$$





粘性流体

- 粘性を考慮した運動方程式
  ナビエ・ストークスの方程式
  （以下は非圧縮性とした）

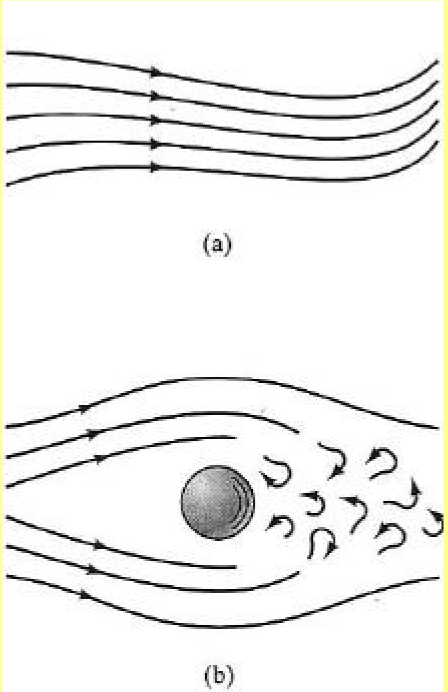
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{t}} + \mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{f}}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}^2}$$

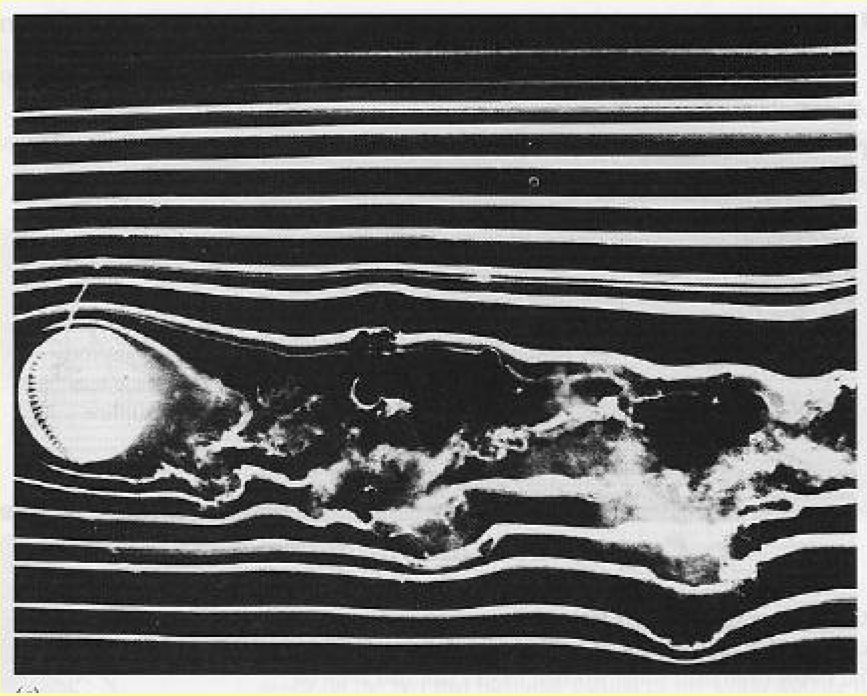
相似則

- レイノルズ数
  単位を持たない
  （無次元量）
  小さいとき…　層流
  大きいとき…　乱流

$$\mathrm{Re} = \frac{r\mathbf{LV}}{h}$$

層流と乱流





野球ボールの後方に生じた乱流

抵抗力

- 粘性抵抗 :層流のとき

$$F = -bv$$

- 慣性抵抗 :乱流のとき

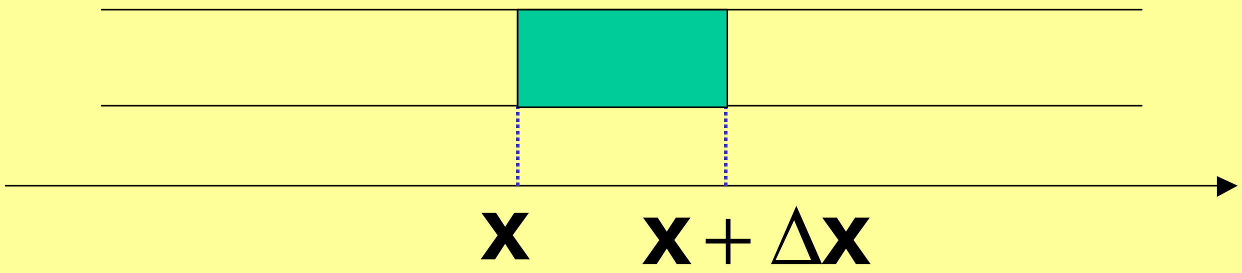
$$F = -b'v^2$$

流線型＝抵抗を
　減らすため

導出

$$\mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}$$

$$\mathbf{F}\Delta\mathbf{t} \quad = \quad \Delta\mathbf{p}_{\mathbf{m}}$$



運動量の時間変化

その中身

$$\underbrace{r\mathbf{S}\Delta\mathbf{xv}}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{t}} - \underbrace{r\mathbf{S}\Delta\mathbf{xv}}_{\mathbf{t}} \quad = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\mathbf{pS}}^{\mathbf{x}} - \overbrace{\mathbf{pS}}^{\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}} \\ \mathbf{fS}\Delta\mathbf{x} \\ \underbrace{(r\mathbf{Sv})\mathbf{v}}_{\mathbf{x}} - \underbrace{(r\mathbf{Sv})\mathbf{v}}_{\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}} \end{array} \right\} \times \Delta\mathbf{t}$$

両辺をSΔ xΔ tで割る

$$\frac{\underbrace{r\mathbf{v}}_{\mathbf{t}+\Delta\mathbf{t}} - \underbrace{r\mathbf{v}}_{\mathbf{t}}}{\Delta\mathbf{t}} = \left\{\begin{matrix} (\overbrace{\mathbf{p}}^{\mathbf{x}} - \overbrace{\mathbf{p}}^{\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}})/\Delta\mathbf{x} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{v}(\underbrace{r\mathbf{v}}_{\mathbf{x}} - \underbrace{r\mathbf{v}}_{\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}})/\Delta\mathbf{x} \end{matrix}\right\}$$

極限をとる

$$\frac{\partial(r\mathbf{v})}{\partial\mathbf{t}} = \left\{\begin{matrix} -\partial\mathbf{p}/\partial\mathbf{x} \\ \mathbf{f} \\ -\mathbf{v}\partial(r\mathbf{v})/\partial\mathbf{x} \end{matrix}\right\}$$