微分と積分

テキスト

１．５－１．６

１．５）微分の考え方

- 物理的な関係式になぜ「微分」が現れるか？ ⇒ それは必然！
- 「速度」を例として説明

座標:質点の位置の記述

ものが動く ⇒ 時間的に座標が変化
（日常語）

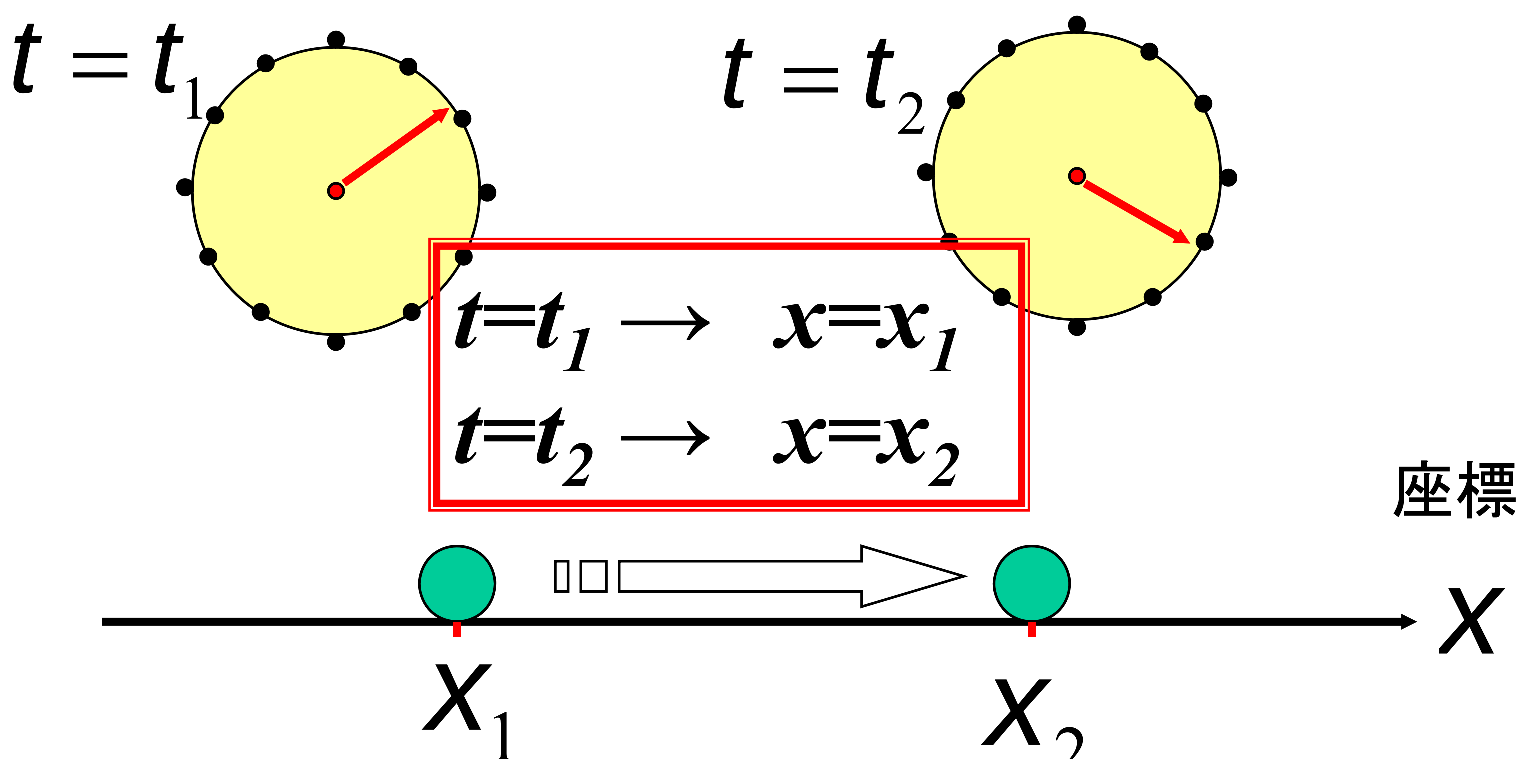
⇒ 座標が時間の関数

$$\boxed{x = x(t)}$$

高校数学: $y = f(x)$

速度

- 位置の観測



速度

$$速度 = \frac{距離}{時間}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t=t_1 \rightarrow \quad x=x_1 \\ t=t_2 \rightarrow \quad x=x_2 \end{array}}$$

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$\boxed{v = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

このような定義は速度が一定のときのみ有効

一般の速度

$$v = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$t_2 - t_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t$$

$$t_1 \quad \Rightarrow \quad t$$

$$v(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

注：$\mathit{\Delta t}$ は全体で1つの字

瞬間的な速度を考える

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

速度を微分で表現

結論

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

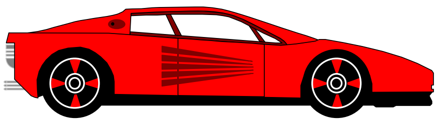
同じ

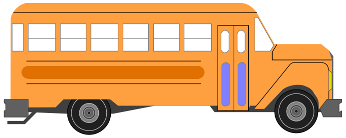
高校数学:

微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

加速度





「加速がいい，悪い」

→ ある速度に達するまでの時間に関係

加速度

＝単位時間あたりの速度の変化の大きさ

加速度

$$\text{加速度} = \frac{\text{速度変化}}{\text{時間}}$$

$$t = t_1 \rightarrow \quad v = v_1$$

$$t = t_2 \rightarrow \quad v = v_2$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

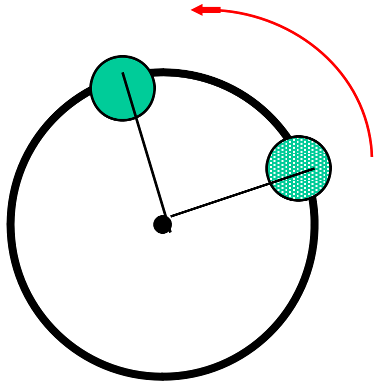
$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \end{aligned}}$$

角速度

1ｓで何ｍ進むか・・速度

1ｓで何ラジアン回転するか
・・・角速度

（角度：ラジアン単位）



例：時計の長針

$$\omega = \frac{2\pi}{3600}$$

角速度

$$角速度 = \frac{回転角}{時間}$$

$$t = t_1 \rightarrow \quad \varphi = \varphi_1$$

$$t = t_2 \rightarrow \quad \varphi = \varphi_2$$

$$\boxed{\omega = \frac{d\phi}{dt}}$$

$$\omega = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\phi(t_2) - \phi(t_1)}{t_2 - t_1}$$

(1.5.1)空間運動の場合

考え方は同じ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

１．６）積分の考え方

$$速度 = \frac{距離}{時間}$$

$$距離 = 速度 \times 時間$$

$$\boxed{v = \frac{x}{t}}$$

$$\boxed{x = vt}$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}}$$

$$\boxed{x = \int v dt}$$

運動の記述：位置，速度，加速度

$$x$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}} \qquad \boxed{x = \int v\,dt}$$

$$v$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}} \qquad \boxed{v = \int a\,dt}$$

$$a$$

積分

- 積分...　不定の定数　（数学）
- （物理）　積分定数は<u>初期条件</u>から決まる
  具体例：例題１．５（１５－１６ページ）

例題1．5

$$v = t + 1 \Rightarrow x = ?$$

$$x = \int v dt$$

積分公式

$$x = \frac{1}{2}t^2 + t + C$$

初期条件　$t = 2$　$x = 5$

$$5 = \frac{1}{2}2^2 + 2 + C$$

$$C = 1$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}t^2 + t + 1}$$

１．６．２）総和と積分

全体を細かく分けて、それを，
全部加える。

$$\boxed{\Sigma}$$

全部加える

密度

$$\boxed{\text{密度} = \frac{\text{質量}}{\text{体積}} \quad \Leftrightarrow \quad \text{質量} = \text{密度} \times \text{体積}}$$

$$\rho = \frac{M}{V} \Leftrightarrow M = \rho V$$

(注)「一様な」・・・物体が均質で，密度などの性質がどこでも同じであること

具体例:一様でない棒の質量

- 棒の「線密度」 ρ

  … 単位長さあたりの質量
- もし棒が一様なら

  質量 ＝ 線密度 × 長さ
- 棒が一様でないとき

  棒を細かく分割して考える

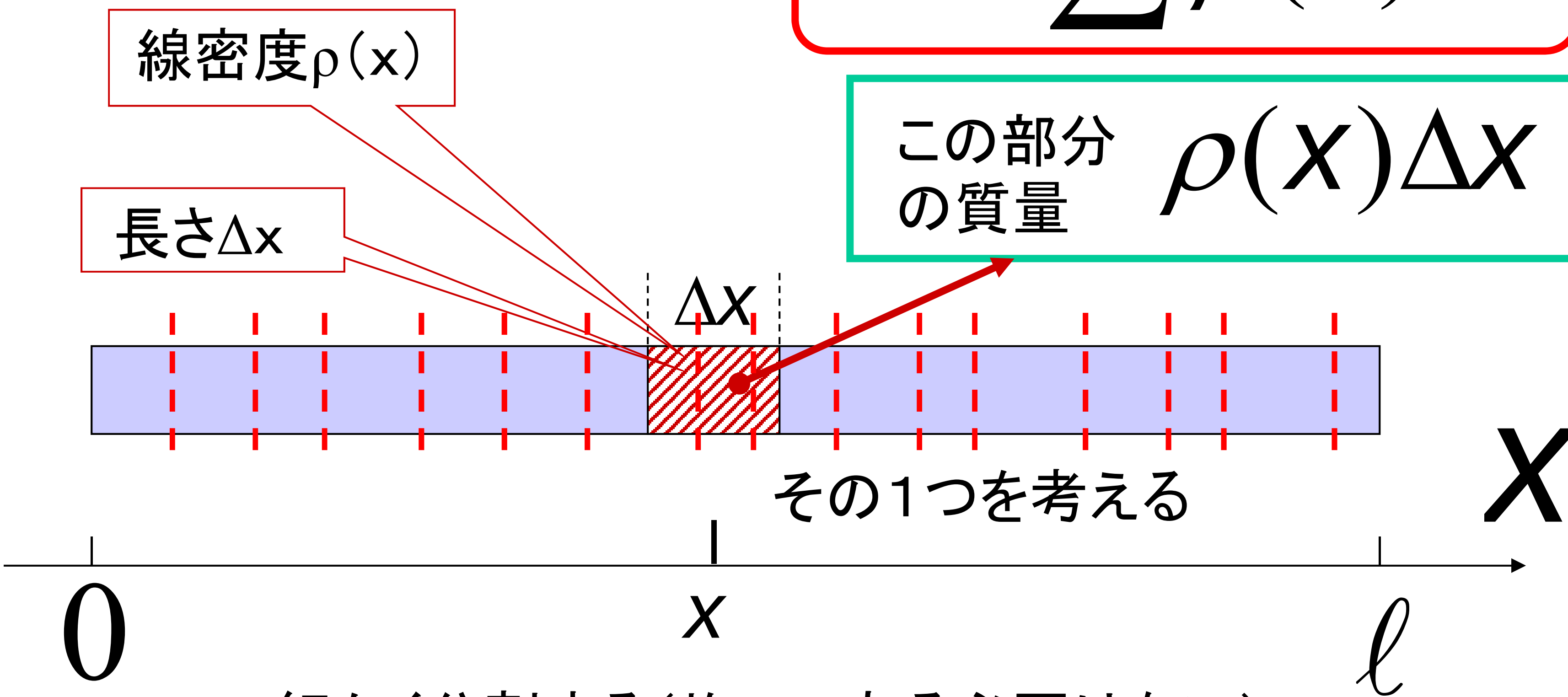
  線密度は座標の関数 $\rho(x)$

一様でない棒の質量

全部合計：全質量

$$M = \sum \rho(x)\Delta x$$

この部分の質量 $\rho(x)\Delta x$



細かく分割する（均一である必要はない）

一様でない棒の質量

全部加えると、全質量　M

$$M = \sum \rho(x)\Delta x$$

この計算は、かけ算とたし算だけ→　電卓（と根気）があれば誰にでもできる

具体例:　p.18:棒の１分割、２分割、４分割…

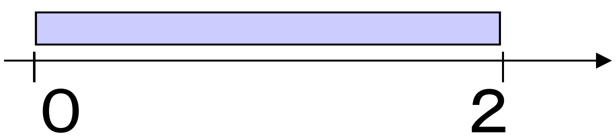
一様でない棒の質量

- そうはいっても、実際には大変
- Σから積分へ→一発で答えがでる

p.19の具体例

$$M = \sum \rho(x)\Delta x$$

$$\rho(x) = 1 + x^2$$



$$\Rightarrow M = \int_0^2 (1 + x^2)dx \;\; = \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{14}{3}$$

分割和から積分へ(p.17)

- 和を無限に細かくとって加えた結果は積分で表現できる

$$\boxed{\sum f(x)\Delta x \overset{\Delta x \to 0}{\Rightarrow} \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx}$$

かす　　　　わ
微かに分かるのが微分

ということでは困ります！

わ　　　　　　　つも
分かった積もりが積分

計算公式➔数学

物理は数学のユーザ

計算に必要な公式･･･付録の活用
高校レベルの力が不足
＝＞学習支援センターへ！

補足スライド

自然法則の記述と微積分

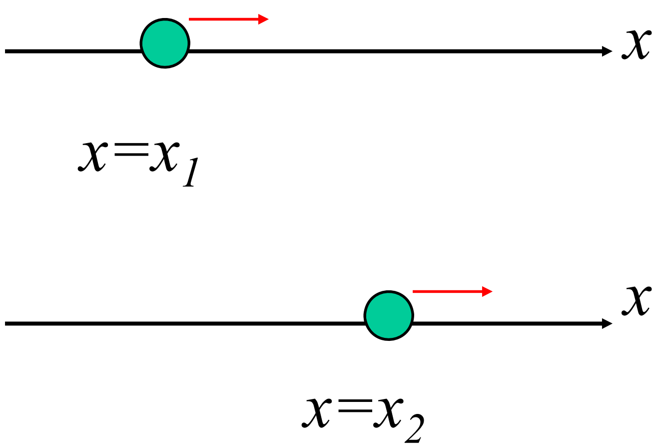
- 自然現象:連続的変化
- その正確な記述＝数学＝微分と積分

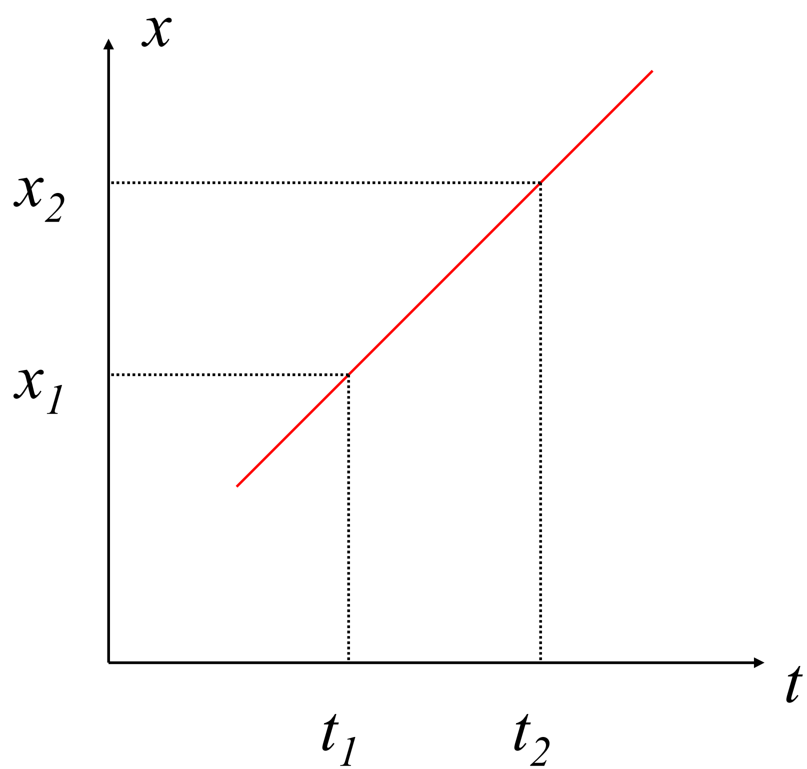
- 以下→具体例:位置(座標)と速度

速度：t-x図

$t=t_1 \longrightarrow \quad x=x_1$

$t=t_2 \longrightarrow \quad x=x_2$





速度：t-x図

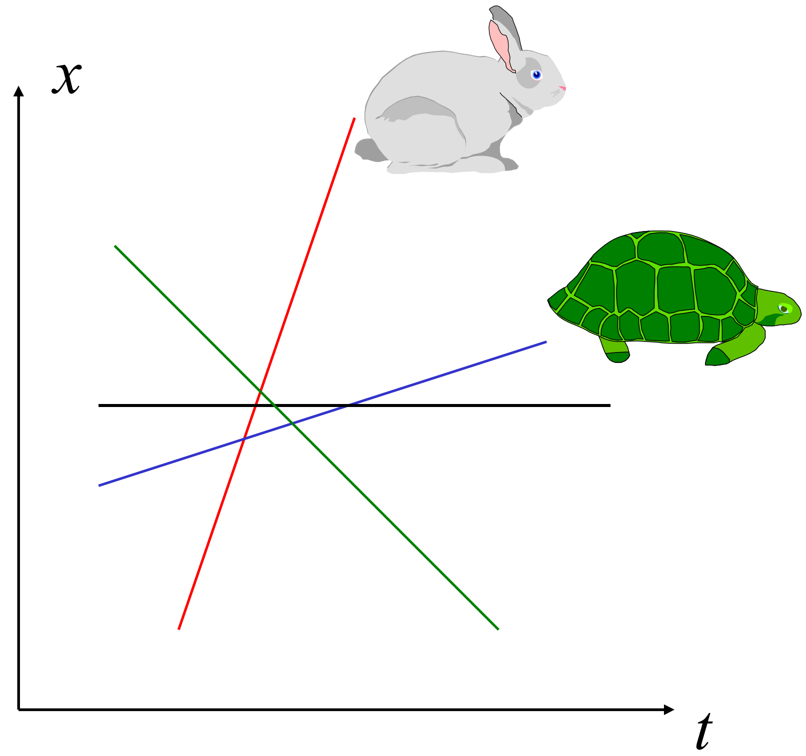
速度＝t-x図の傾き

速い

遅い

静止している　(v=0)

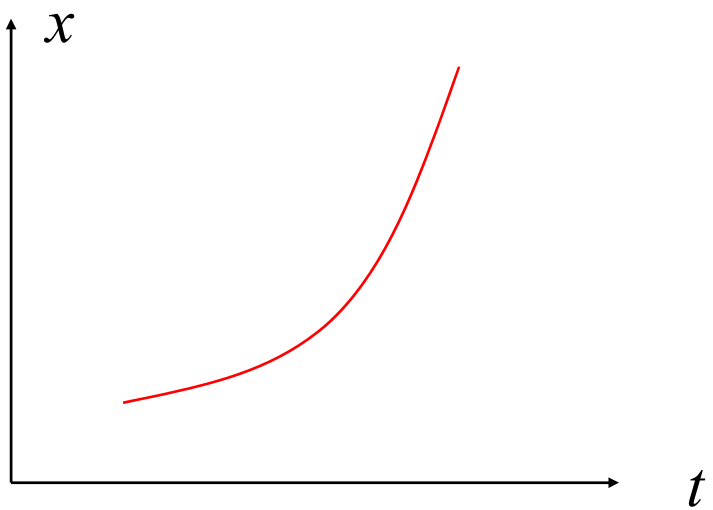
逆行している　(v<0)



速度:一般の場合

t-x 図:直線　…　速度が一定

t-x図:曲線　…　速度が時間的に変化



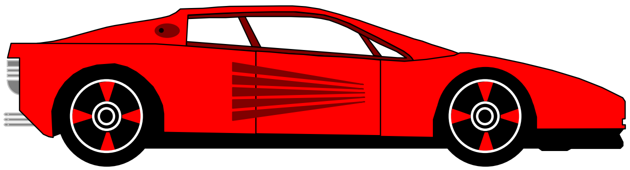
$$\boxed{v = v(t)}$$

どうやって速度を

定義するか　？

速度:まとめ

- 物体が動く→位置 x は時間の関数 x(t)
- 速度 v　は, その x(t)　を時間 t で微分したもの



$$v = \frac{dx}{dt}$$

- 「計算規則」は数学で学ぶ

(1.5.2)偏微分

複数の変数に依存する量の微分

数学で，そのうち勉強するけれど．．．

$$f(x,y)$$

→ x で微分 y は定数 → $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

→ y で微分 xは定数 → $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

積分

位置$x(t)$を時間で微分したものが速度$v(t)$

逆は？
数学：微分の逆演算は積分

速度$v(t)$を時間で積分したものが位置$x(t)$