剛体の力学（1）

5．1 剛体の記述

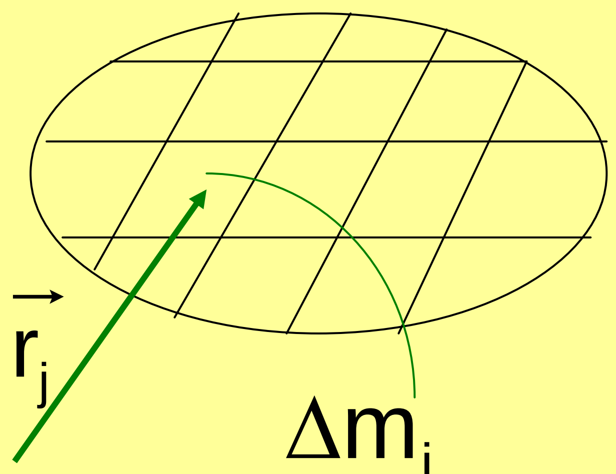
剛体

- 大きさを持つ物体, 変形はしない
- 剛体の運動
  並進運動＋回転運動
- 属性:
  質量 M
  形？質量分布？無限のパラメタ？
  → <u>慣性モーメント I</u>

重心

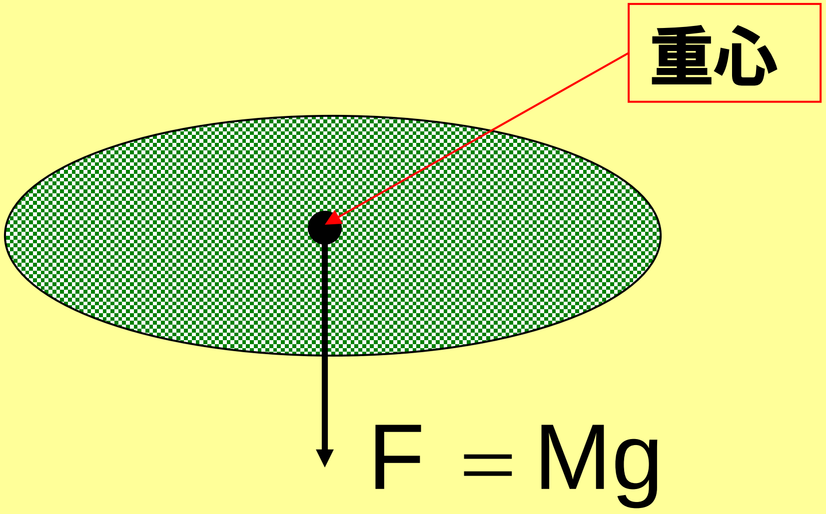
- 質点系の場合と同様。剛体を多数の部分に分割して考える。
→ 体積積分(1.6.1,1.6.2)

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum \vec{r}_j \Delta m_j$$



重心と重力

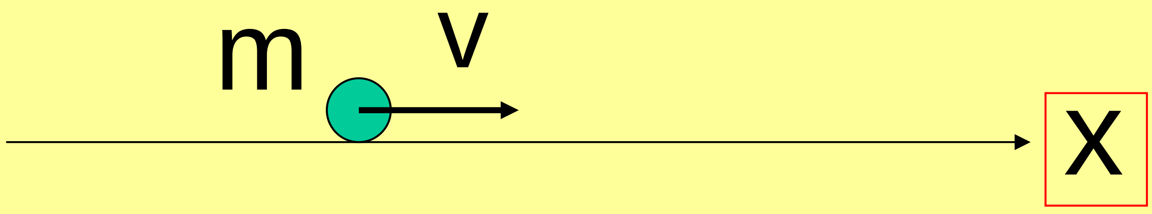
- 剛体に働く重力の作用点＝重心

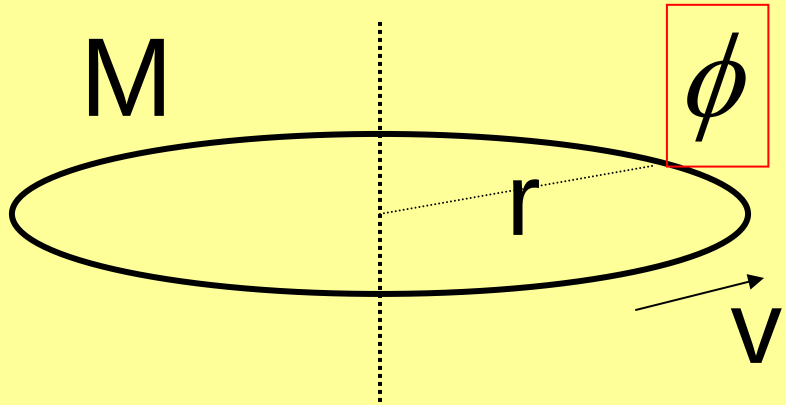


慣性モーメント

- 質量：「並進運動」での動かしやすさ，動かしにくさ
- 「回転運動」での動かしやすさ，動かしにくさは何で決まるか？
  → 単に「重い，軽い」だけではない。
  経験 → 回転半径も意味がある。
- 図５．２の質点と円輪を考察

図5．2の質点と円輪を考察





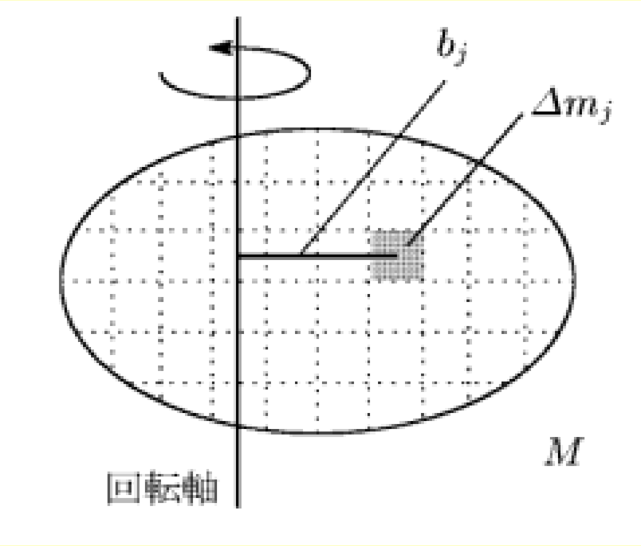
	直進運動	回転運動
位置記述	座標 x	回転角 φ
時間変化	$v = \frac{dx}{dt}$	$\omega = \frac{d\phi}{dt}$
エネルギー	$\frac{1}{2} mv^2$	$\frac{1}{2} Mr^2 \omega^2$

$\boxed{Mr^2}$ **が回転のしやすさ, しにくさを表す**

剛体の慣性モーメント

剛体を多数の小部分に分割し, Mr^2 を合計する

$$\boxed{I = \sum_j b_j^2 \Delta m_j}$$



この量は回転軸の
とりかたに依存する

慣性モーメント：一般論

慣性モーメントはいくつあるのか？無数？

1) 重心を通らない回転軸の I は, 重心を通る平行な軸に関する I から決まる。(p.83-84:平行軸の定理)

2) 重心を通る任意の軸に関する I は3つの主慣性モーメントから決まる。(5.1.4節：慣性テンソルの議論)

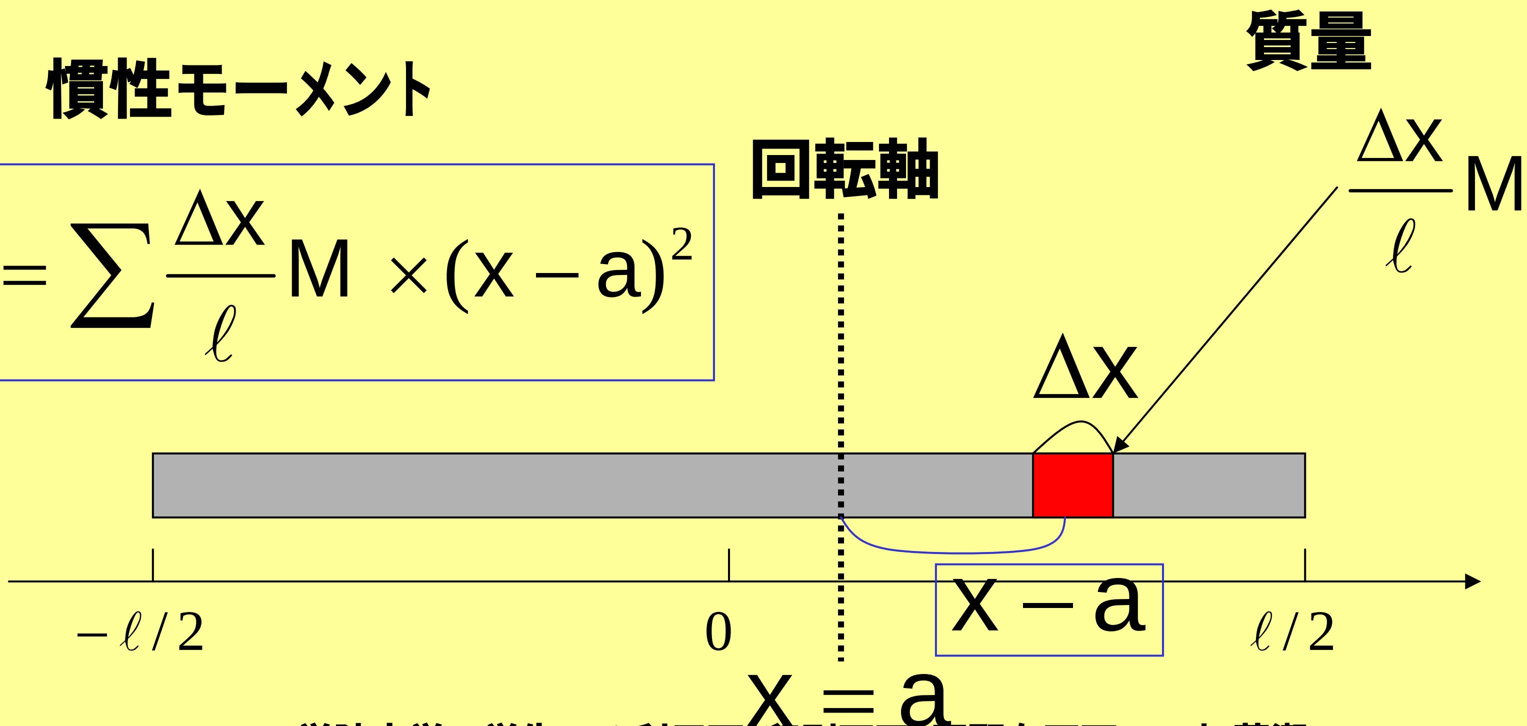
→ 以下で説明

慣性モーメント：具体例

質量 M , 長さ l の一様な棒

慣性モーメント

$$I = \sum \frac{\Delta x}{\ell} M \times (x-a)^2$$



慣性モーメント

$$\boxed{I = \sum \frac{\Delta x}{\ell} M \times (x-a)^2}$$

分割和から積分へ

(p.16：**基本パターン**)

$$I = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{M}{\ell}(x-a)^2 dx$$

$$= \frac{1}{12} M\ell^2 + Ma^2$$

結果の解釈

重心のまわり
(a=0 **のとき**) **の**
慣性モーメント

$$I_G = \frac{1}{12} M\ell^2$$

左の結果

a **は重心からの距離**

$$I = I_G + Ma^2$$

一般化

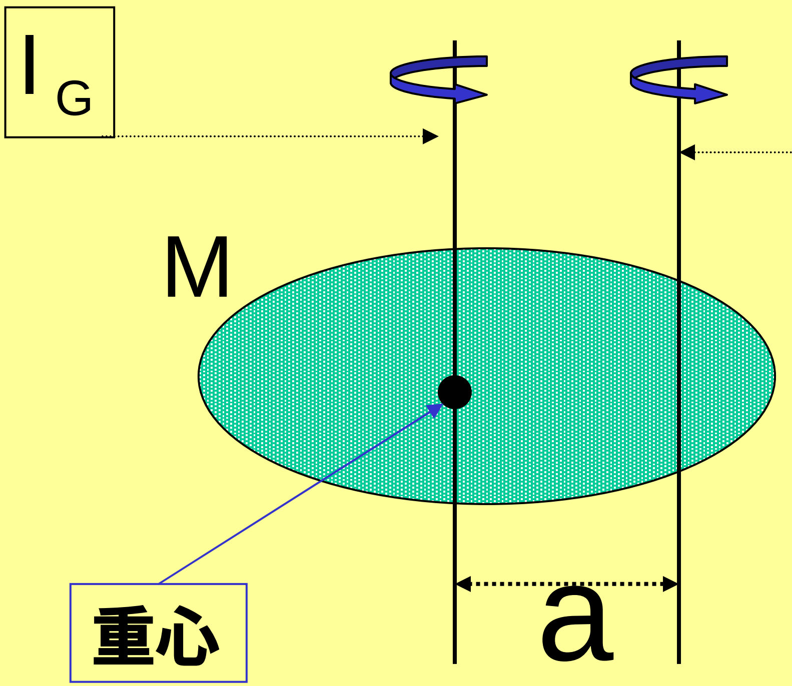
平行軸の定理

平行軸の定理

重心を通る軸のまわりの慣性モーメント

それに平行な軸のまわりの慣性モーメント

I

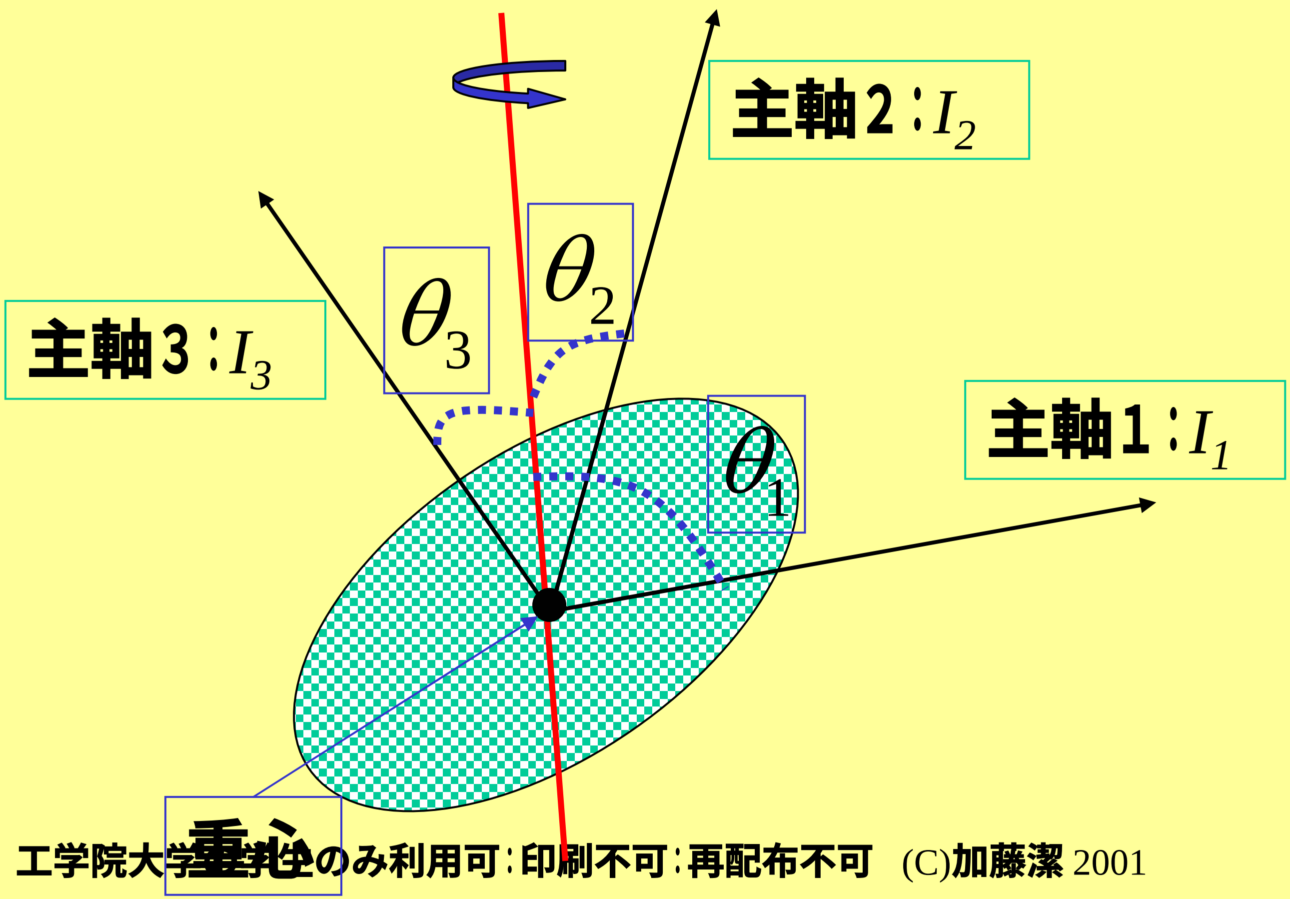


$$I = I_G + Ma^2$$

慣性テンソル

- 重心を通る一般的な回転軸の周りの慣性モーメント：慣性テンソル（3行3列の行列）と回転軸の単位方向ベクトルで記述される。
- 数学：適切な座標変換により「対角化」される。
- 慣性主軸と3つの慣性モーメントで記述される。

$$I = \cos^2\theta_1 I_1 + \cos^2\theta_2 I_2 + \cos^2\theta_3 I_3$$



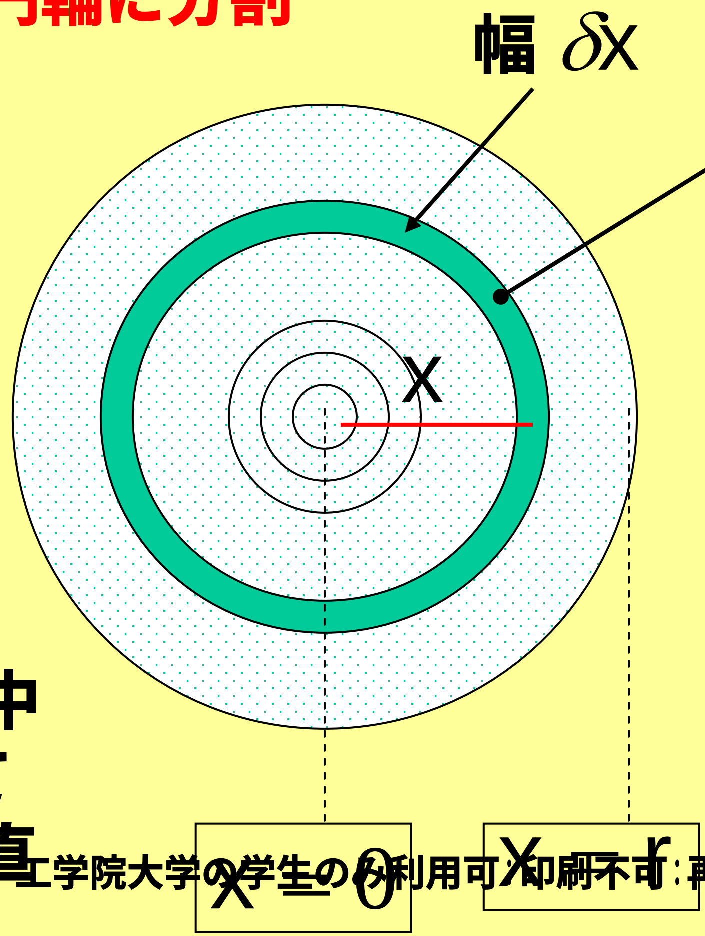
基本的な立体の慣性モーメント

一様な立体, 質量M

- 直方体, 長方形の板：式(5.16, 5.17)
- 円板, 円柱：式(5.18), 問５．４
- 球：式(5.19), 問５．５
- 円錐：問５．６

円板, 円柱 (問5．4) 半径 r

多数の円輪に分割



この部分の面積

$$\boxed{2\pi x \cdot \delta x}$$

この部分の質量

$$\boxed{\frac{2\pi x\,\delta x}{\pi r^2} M}$$

その慣性モーメント

$$\boxed{\frac{2\pi x\,\delta x}{\pi r^2} M \cdot x^2}$$

回転軸は中心を通って円板に垂直

$$I = \sum \frac{2\pi x\,\delta x}{\pi r^2} M \cdot x^2$$

分割和から積分へ（p.16：基本パターン）

$$I = \int_0^r \frac{2M}{r^2} x^3 dx$$

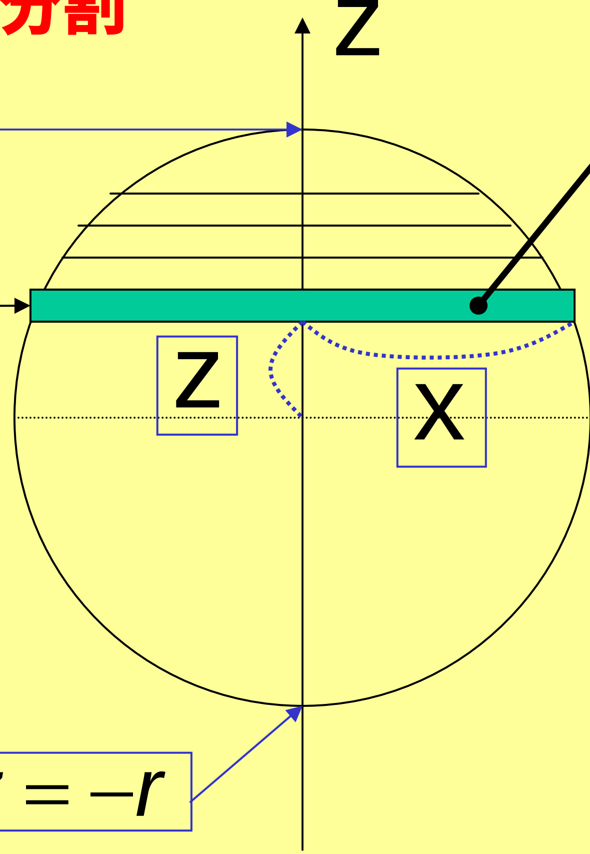
$$= \frac{2M}{r^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r = \frac{1}{2} M r^2$$

球（問5．5）半径r

多数の円板に分割

$z = r$

厚さδz



$$x = \sqrt{r^2 - z^2}$$

回転軸は中心を通る

$z = -r$

この部分の体積

$$\pi x^2 \cdot \delta z$$

この部分の質量

$$\frac{\pi x^2 \delta z}{\frac{4}{3}\pi r^3} M$$

その慣性モーメント

$$\frac{1}{2}\frac{\pi x^2 \delta z}{\frac{4}{3}\pi r^3} M x^2$$

$$I = \sum \frac{1}{2} \frac{\pi x^2 \delta z}{\frac{4}{3}\pi r^3} M \cdot x^2$$

分割和から積分へ (p.16：**基本パターン**)

$$I = \int_{-r}^{r} \frac{3M}{8r^3} x^4 dz$$

$$\boxed{x = \sqrt{r^2 - z^2}}$$

$$= \frac{3M}{8r^3} \left[\frac{z^5}{5} - \frac{2r^2 z^3}{3} + r^4 z \right]_{-r}^{r} = \frac{2}{5} M r^2$$