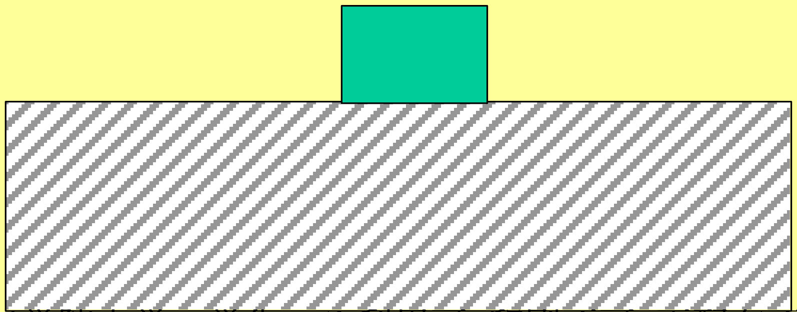
剛体の力学 (2)

5. 2 抗力, 摩擦力, 張力

5. 3 剛体の運動方程式

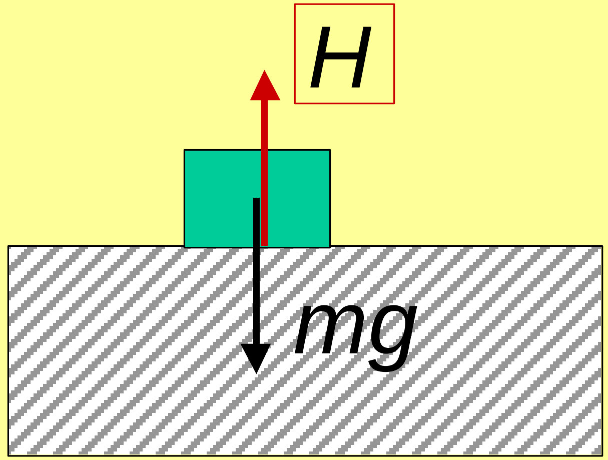
抗力

- 「台の上に物体があって静止している」ことを力学的にどう表現するか。



- 「台の上に物体があって静止している」
- 働く力は０（第一法則）
- 重力 mg が働いている
- 別の力がそれを打ち消している→　抗力　H
- 抗力は「他律的」に決まる？　（mで変化）
- 実体：物質構造に関係する複雑な力

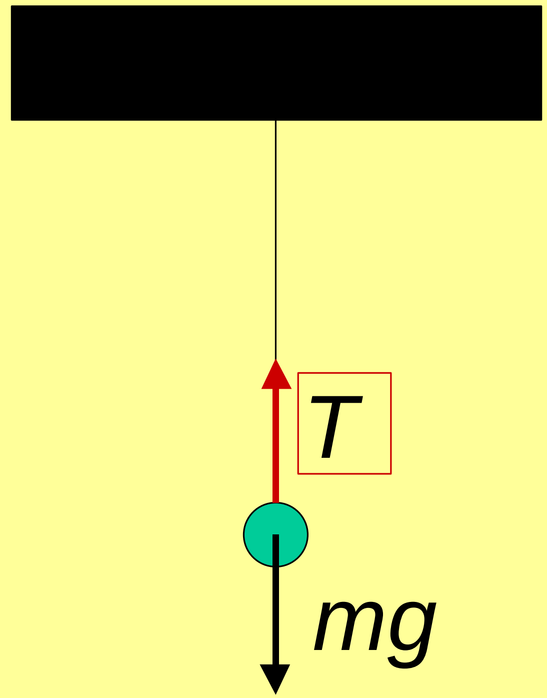
$$H = mg$$



ひもの張力

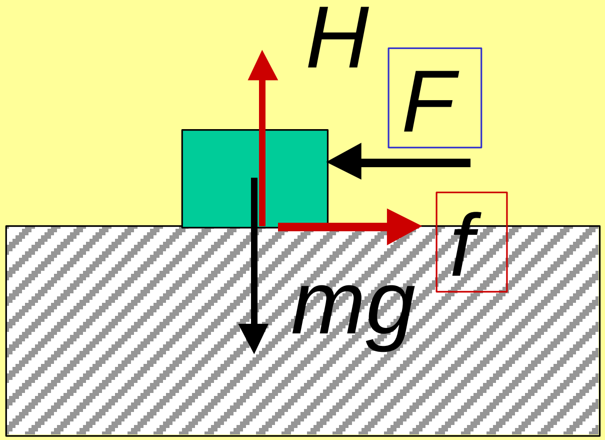
- ひもが伸び縮みしないという条件から決まる。

$$T = mg$$



摩擦力

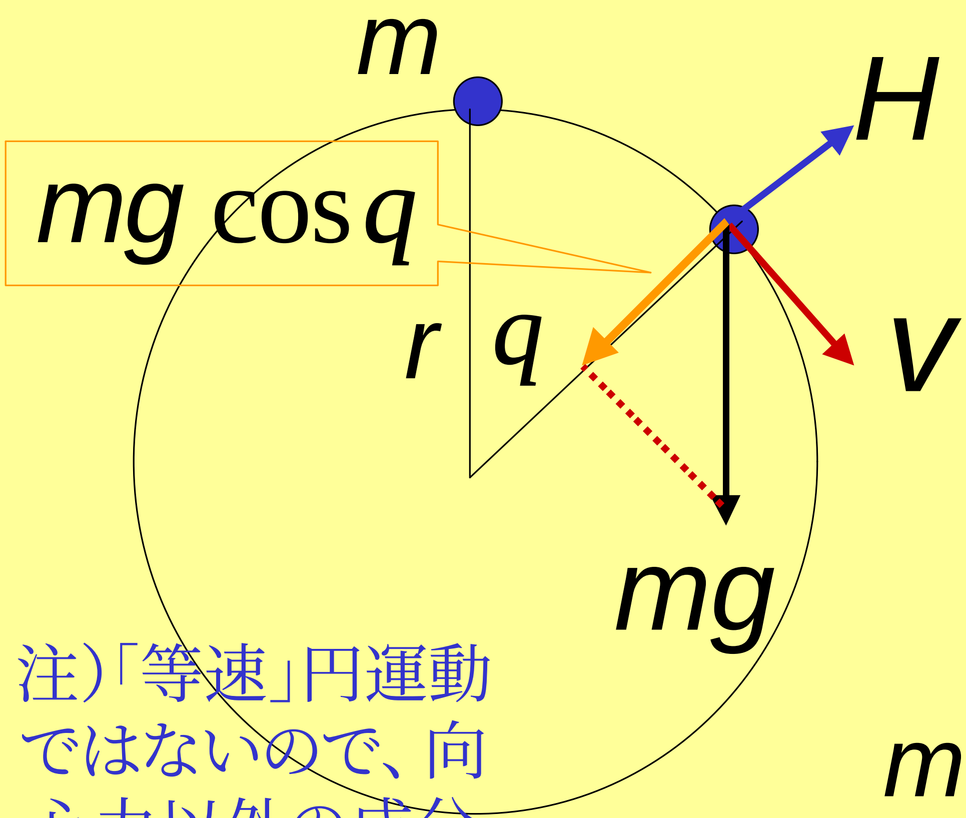
- 固体の面接触
  面に垂直な力：抗力 H（前に説明）
  面に平行な力：摩擦力 f



- 摩擦力 f には上限がある。
  静止摩擦係数μ

$$f \leq mH = mmg$$

問5. 7



向心力

2. 3. 6節

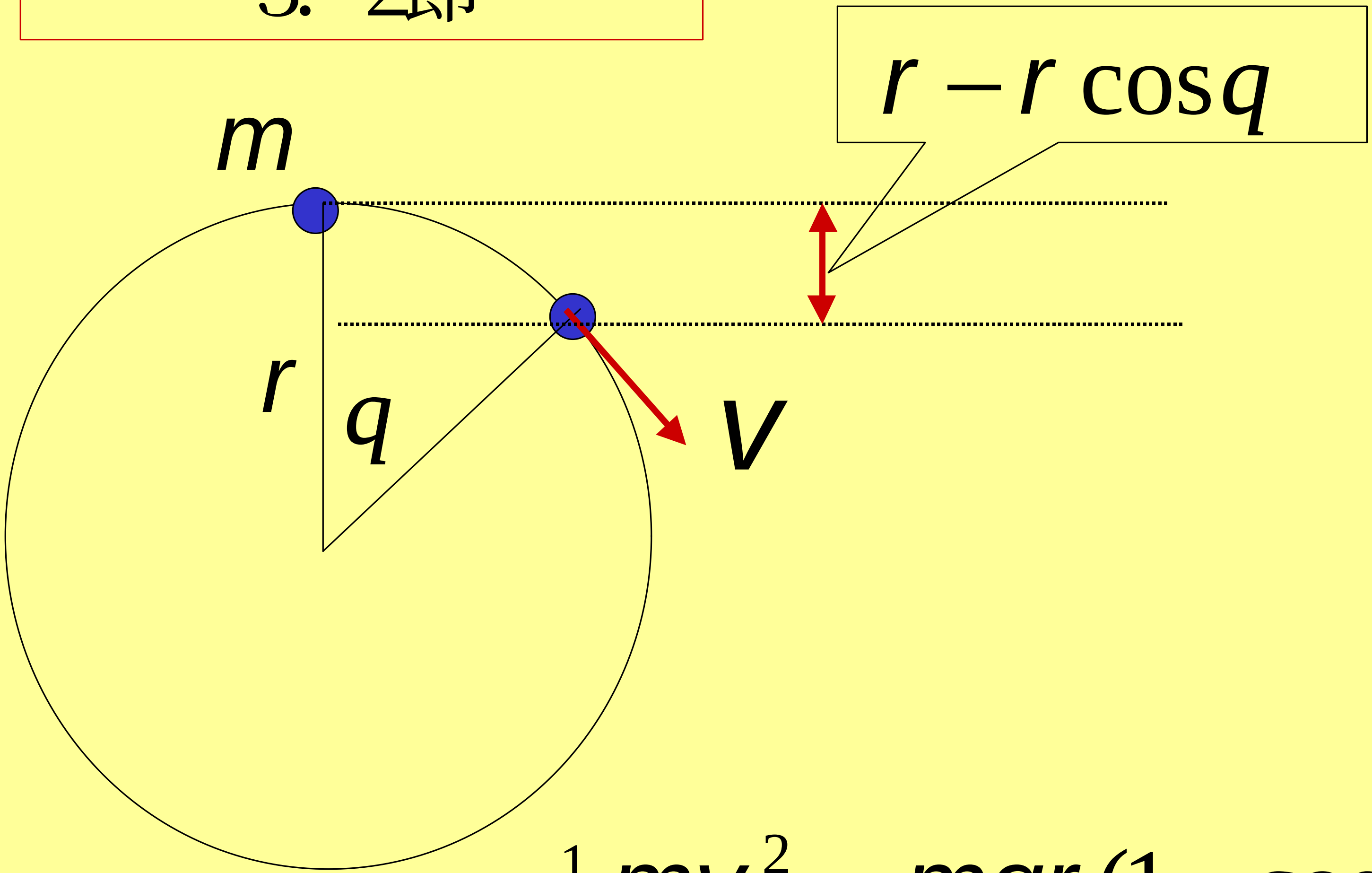
$$m\frac{v^2}{r}$$

この実体は
重力と抗力

注)「等速」円運動ではないので、向心力以外の成分も残る

$$m\frac{v^2}{r} = mg\cos q - H$$

エネルギー保存則
3. 2節



$$\frac{1}{2}mv^2 = mgr(1-\cos q)$$

$$m\frac{v^2}{r} = mg\cos q - H$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgr(1-\cos q)$$

$$H = mg(3\cos q - 2)$$

抗力Hは正
であるべき

H=0で球面
から離脱

$$\cos q = \frac{2}{3}$$

剛体の運動方程式

並進運動

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

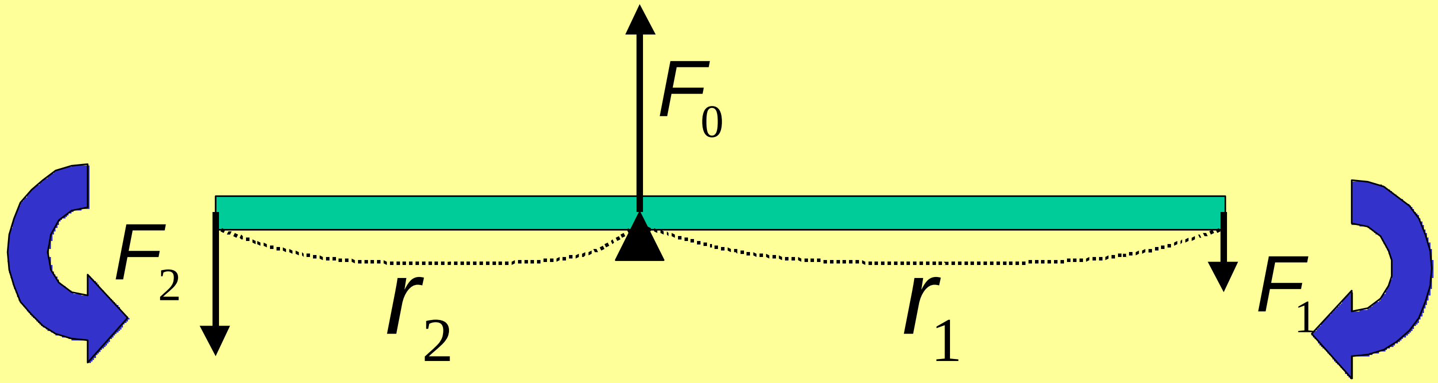
回転運動

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

静力学

- 剛体の静止条件を調べること
- 条件式

$$\vec{F} = 0 \quad \vec{N} = 0$$



力： $\vec{F}_0+\vec{F}_1+\vec{F}_2=0 \quad \Rightarrow \quad F_0=F_1+F_2$

力のモーメント:右回り r_1F_1

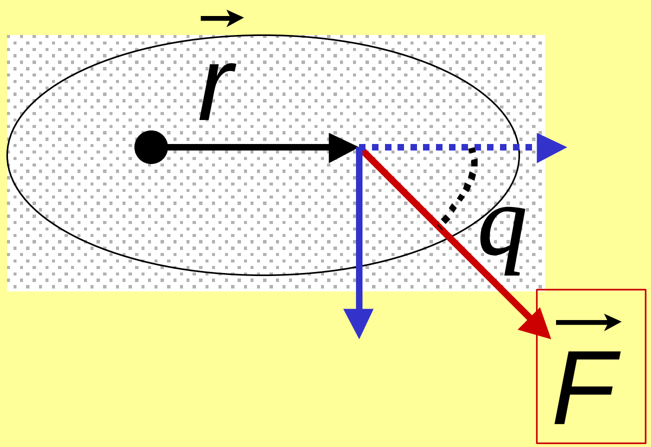
力のモーメント:左回り r_2F_2

$$\boxed{r_1F_1=r_2F_2}$$

力のモーメント

$$N = rF$$

$$\boxed{N = rF \sin q}$$



$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

一般的にはベクトルの外積で表示される

力のモーメントのつりあい

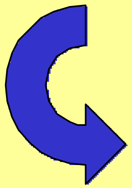
$$\vec{N} = 0$$

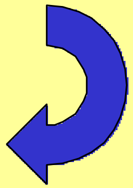
固定軸の回りの回転

（力は1平面内）

$$\boxed{N = rF\sin\theta}$$

左回りの力のモーメント＝右回りの力のモーメント

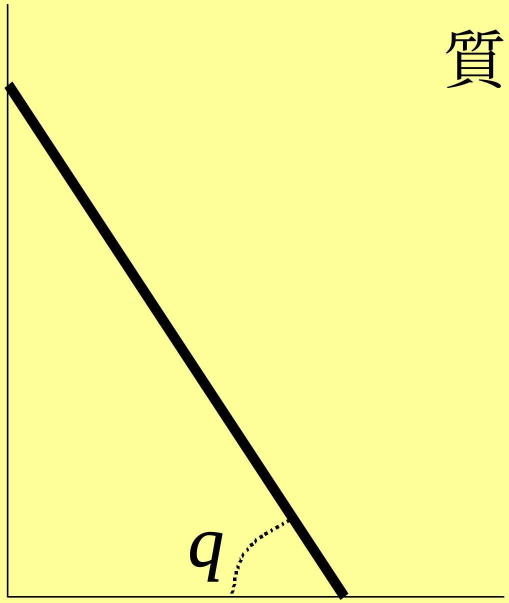




壁面に立てかけた棒（問5.8）

長さ　ℓ

質量　M



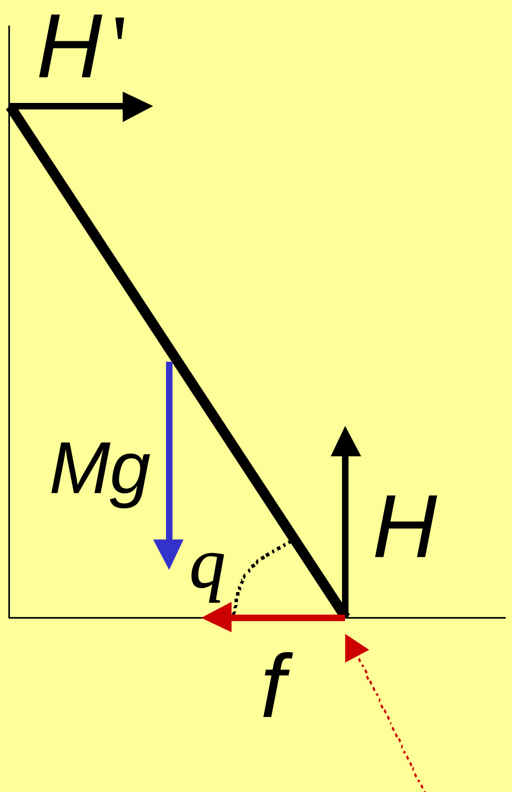
棒が倒れないための条件を調べる

手順

1）働く力をすべて与える。

2）F＝0, N＝0の式を作る。

3）解く。



F= 0

水平成分：　$H' = f$

鉛直成分：　$Mg = H$

N= 0

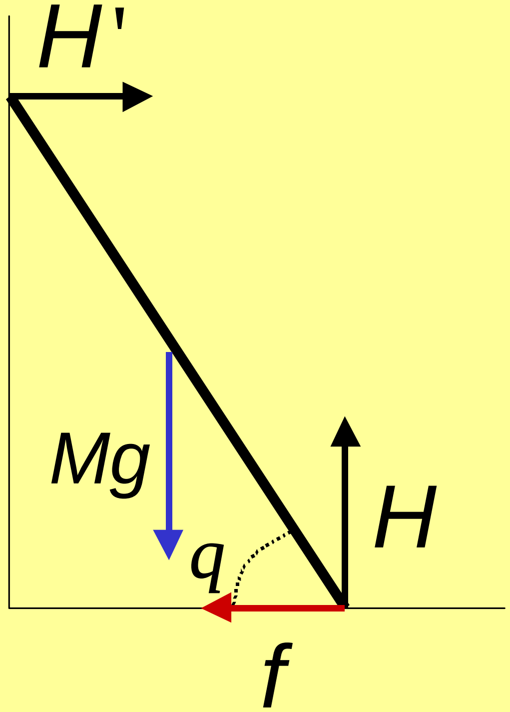
どこを「原点」にするかをまず決める

（どこでもよいが，計算が簡単になる方がよい）

例：ここを原点とする。

→　Hとfは効かない

$$Mg\frac{\ell}{2}\cos q = H'\ell\sin q$$



$$H' = f$$

$$Mg = H$$

$$Mg\frac{\ell}{2}\cos q = H'\ell\sin q$$

$$\boxed{f = H' = \frac{Mg\cos q}{2\sin q}}$$

$$\boxed{H = Mg}$$

摩擦力が耐えられるための条件

$$\boxed{f \leq mH}$$

$$\boxed{\frac{\cot q}{2} \leq m}$$

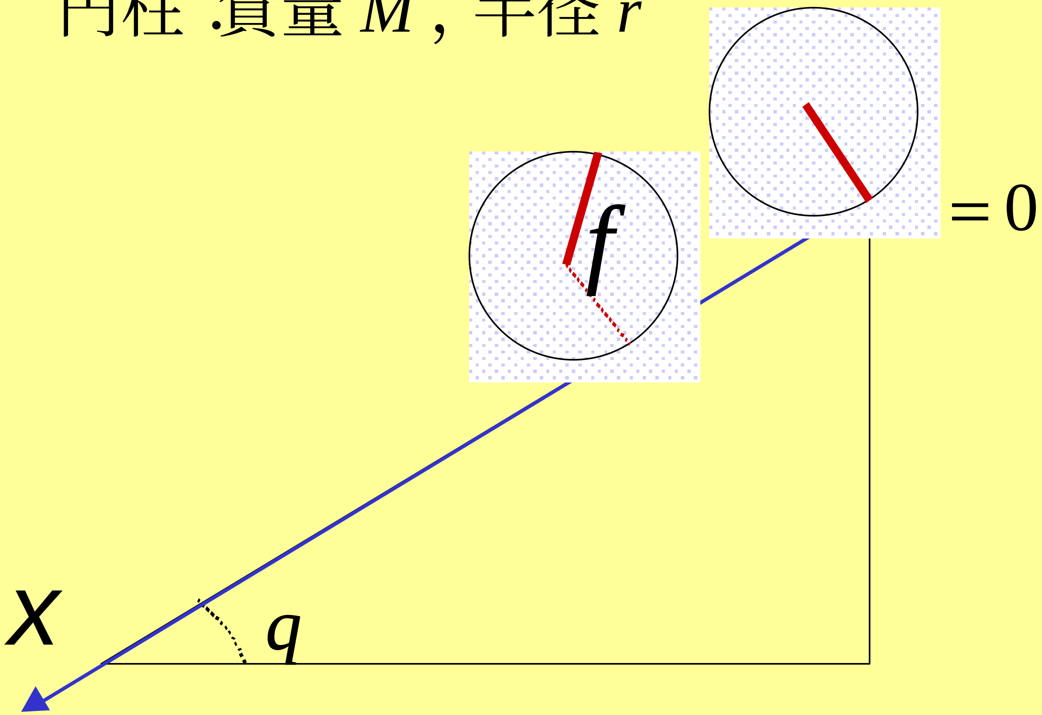
剛体の運動

- 回転軸の方向が一定の場合の扱いを調べる。（一般の場合は難。例：コマの運動）
- 重心の位置*x*, 重心のまわりの回転角 φ

$$F = M\frac{d^2x}{dt^2} \quad N = I\frac{d^2f}{dt^2}$$

斜面を滑らず転がる円柱

円柱 :質量 M, 半径 r

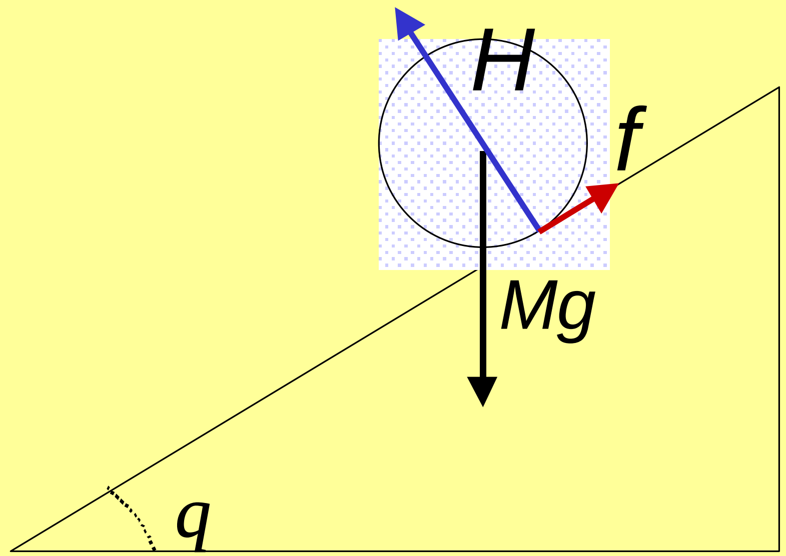


まず, 座標を設定

滑らずに転げ落ちる

$$x = r f$$

円柱 :質量 M , 半径 r



働く力を調べる。

→　重力, 抗力,
摩擦力

$\boxed{\text{運動方程式}}$

$$F = M\frac{d^2x}{dt^2} \qquad N = I\frac{d^2f}{dt^2}$$

x 軸方向に働く力　$F = Mg\sin q - f$

重心のまわりの力の
モーメント　$N = rf$

$$Mg\sin q - f = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$rf = I\frac{d^2f}{dt^2}$$

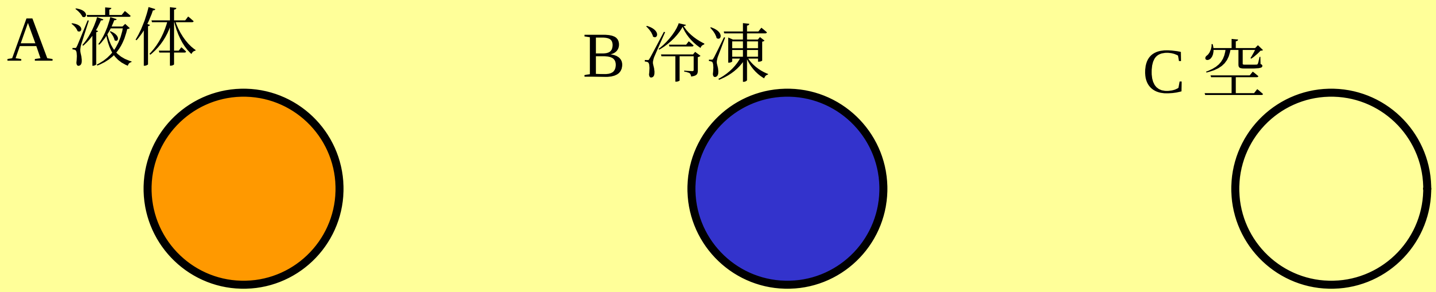
$$x = rf$$

$$f = \frac{I}{r}\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{I}{r^2}\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$Mg\sin q = \left(M + \frac{I}{r^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2}$$

加速度 $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{1+I/Mr^2}g\sin q$$

問5．10



M=全体の質量，*m*＝缶の質量

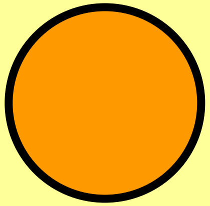
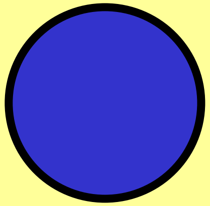
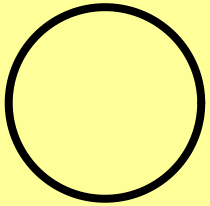
常識：*M*が*m*よりずっと大きい

液体は最初のうち回転しない

「順序」を考えるだけなので，細部（ワタの部分など）を気にしなくてよい。

$\boxed{\text{加速度}}$ $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{1+I/Mr^2} g \sin q$$

加速度の大小で順序が決まる　(以下近似的計算)

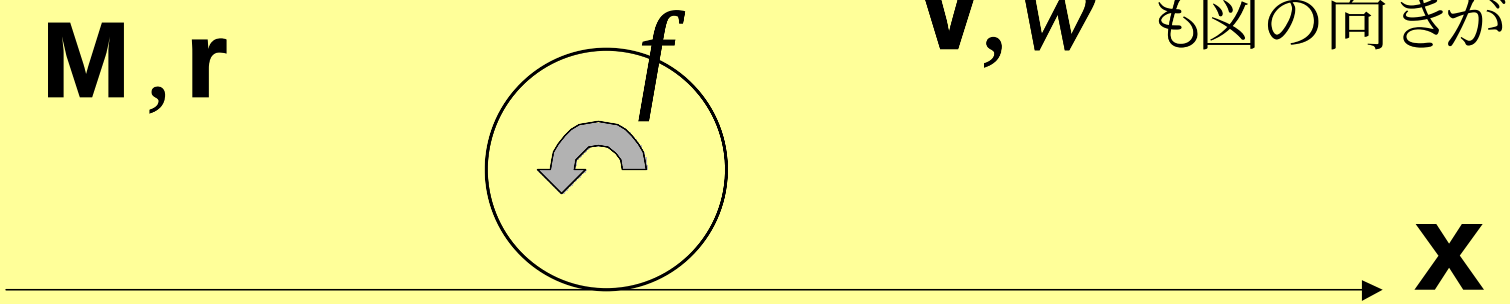
			
I	$\mathbf{mr}^2$	$\frac{1}{2}\mathbf{Mr}^2$	$\mathbf{mr}^2$
$\mathbf{I}/\mathbf{Mr}^2$	$\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{M}}$	$\frac{1}{2}$	1
加速度	a_A >	a_B >	a_C

問5．12

円柱

$\mathbf{M}, \mathbf{r}$

$\mathbf{V}, w$ も図の向きが正

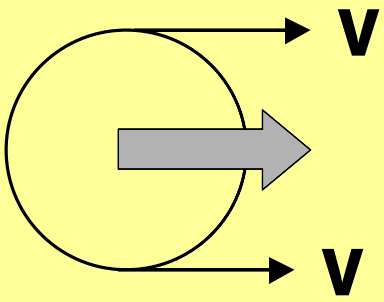


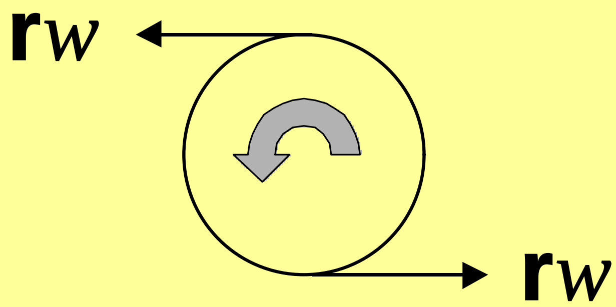
座標の定義

初期条件

$$\mathbf{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{V}_0, w = w_0$$

並進運動の速度　　　　　　回転（自転）運動の速度





$\boxed{v + rw}$　は何を表すのか？

円柱の床面に接触する部分の床に対する速度を表す

$\boxed{v + rw = 0}$　とは何を意味するのか？

接触部の速度0→「ころがっている」ことを意味する

（このとき, v と ω の符号は逆。）

運動方程式

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{M}\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{x}}{\mathbf{dt}^2} = \mathbf{M}\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}} \quad \mathbf{N} = \mathbf{I}\frac{\mathbf{d}^2 f}{\mathbf{dt}^2} = \mathbf{I}\frac{\mathbf{d}w}{\mathbf{dt}}} \qquad \mathbf{I} = \frac{1}{2}\mathbf{Mr}^2$$

$$F = \pm m'H = \pm m'Mg$$

$$N = rF = \pm m'Mgr$$

$$\begin{cases} - & \mathbf{v} + \mathbf{r}w > 0 \\ + & \mathbf{v} + \mathbf{r}w < 0 \end{cases}$$

動摩擦力の向きによる

運動方程式

$$\boxed{\pm m'g = \frac{dv}{dt} \qquad \pm m'g = \frac{1}{2}\frac{d(rw)}{dt}}$$

$$\begin{cases} v = V_0 \mp m'gt \\ rw = rw_0 \mp 2m'gt \end{cases}$$

$t = \dfrac{|V_0 + rw_0|}{3m'g}$ の時刻に $v + rw = 0$ となる

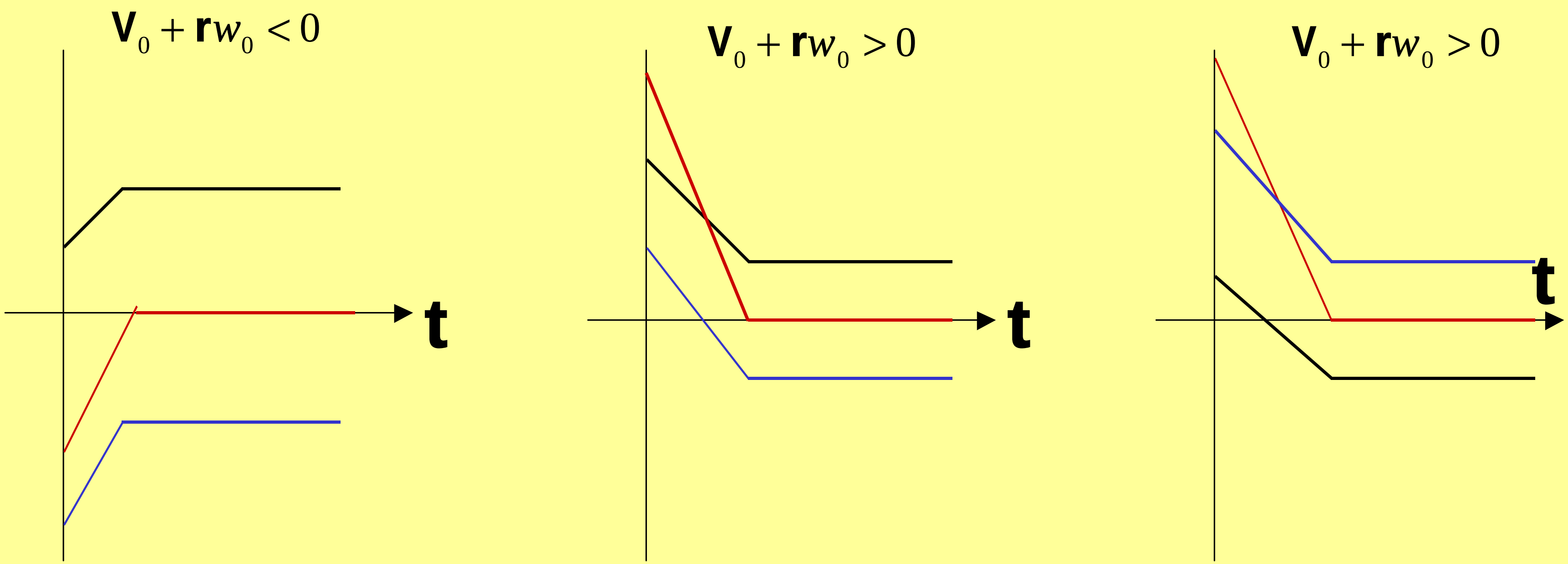
それ以降は一定速度で運動する。（ころがり摩擦は無視。）

そのときの速度

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_0 \mp \tfrac{1}{3}\left|\mathbf{V}_0 + \mathbf{r}w_0\right|$$

初期条件により各種のケースがある

$\boxed{\mathbf{v}}$ $\boxed{\mathbf{r}w}$ $\boxed{\mathbf{v}+\mathbf{r}w}$



これが戻るピンポン球のケース