

略解

惑星の軌道運動の周期 T は、太陽の質量 M 、公転半径 R 、万有引力定数 G から決まると考えられる。次元解析により、 T を次元のない比例係数 C と M, R, G で表せ。(ヒント： G の単位は $[\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)]$ である。)

.....

$T = CM^a R^b G^c$ の形を仮定する。 C は次元のない比例定数である。
単位を調べる。

$$\text{左辺} = [\text{s}]$$

$$\text{右辺} = [\text{kg}]^a [\text{m}]^b [\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)]^c = [\text{kg}]^{a-c} [\text{m}]^{b+3c} [\text{s}]^{-2c}$$

両辺を比較すると以下を得る。

$$0 = a - c, \quad 0 = b + 3c, \quad 1 = -2c$$

これを解くと

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}$$

となる。これから

$$T = CM^{-1/2} R^{3/2} G^{-1/2} = C \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

となる。