略解

x 軸上を運動する質量 m の質点に力 $F=-kx+hx^2$ が働いている。(k,h は正の定数。）質点は位置 $x=0$ で速度 V を持っている (V は正の定数)。

1. この力を表すポテンシャルエネルギーを答えよ。ただし $x=0$ で $U=0$ となるものとする。

   基本的な関係式，$U=-\int Fdx$ を利用する。

$$U=-\int -kx+hx^2dx=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{3}hx^3+C$$

   積分定数は「$x=0$ で $U=0$ となるものとする」という条件から $C=0$ となる。

$$U=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{3}hx^3$$

2. 関数 $U(x)$ が極大となる位置を $x=a$ とする。a と $U(a)$ を答えよ。
3. 関数 $U(x)$ のグラフの概形を描け。

   グラフを描くため，関数の挙動を調べる。微分して，増減表を作る。

$$\frac{dU}{dx}=0 \quad\rightarrow\quad kx-hx^2=0 \quad\rightarrow\quad x(k-hx)=0 \quad\rightarrow\quad x=0 \text{ or } x=\frac{k}{h}$$

   この $\frac{k}{h}$ が極大となる $x=a$ である。

$$a=\frac{k}{h} \quad\rightarrow\quad U(a)=\frac{1}{2}k\left(\frac{k}{h}\right)^2-\frac{1}{3}h\left(\frac{k}{h}\right)^3=\frac{k^3}{6h^2}$$

x		0		a	
U'	$-$	0	$+$	0	$-$
U	$\searrow$	0	$\nearrow$	$U(a)$	$\searrow$

   （グラフは省略する。）

4. 運動範囲が有限であるための V の上限を答えよ。

   全力学的エネルギーを E とする。E は $x=0$ で計算する。

$$E=\frac{1}{2}mV^2<U(a)$$

   ならば運動範囲は有限となる。

$$V<\sqrt{\frac{k^3}{3mh^2}}$$