

略解

$F = -kx$ の力によって運動をしている質量 m の質点が、運動 $x = A \sin \omega t$ をしている。運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー U を計算し、両者の和 $E = K + U$ が時間的に一定であることを示し、その一定の値を m, A, ω を用いて答えよ。

まず、速度を求める。

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$$

運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー U を計算する。

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2(\cos \omega t)^2$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2(\sin \omega t)^2$$

ここで、単振動での基本的な関係式 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ を用いると、

$$U = \frac{1}{2}(m\omega^2)A^2(\sin \omega t)^2$$

となる。 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いると

$$K + U = \frac{1}{2}mA^2\omega^2(\cos \omega t)^2 + \frac{1}{2}mA^2\omega^2(\sin \omega t)^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

となり、全エネルギー E は時間 t を含まない式、つまり、一定の値となる。

なお、この結果の式からわかるように、単振動のエネルギーは振幅の二乗および振動数の二乗に比例する。これは、振動現象の重要な性質である。授業であまり強調する時間が無かったが覚えておいて貰いたい。