略解

x 軸上を運動する質点の加速度が $a = g - kv$ であったとする（g, k は正の定数)。時刻 $t = 0$ で質点の速度は $v = 0$ ，位置は $x = 0$ である。
速度と位置を求めよ。速度のグラフを描け。

(計算過程)

$a = g - kv$ で a を v で書き換えると $\underline{\frac{dv}{dt} = g - kv}$ となり，v に関する <u>微分方程式</u> となる。この方程式は変数分離形なので，

$$\frac{1}{g-kv}\frac{dv}{dt} = 1, \quad \to \quad \int \frac{1}{g-kv}\frac{dv}{dt}dt = \int dt, \quad \to \quad \int \frac{1}{g-kv}dv = \int dt,$$

と変形すると $\displaystyle\int \frac{dv}{g-kv} = \int dt$ となる。

この式を積分し，積分定数を C とすると $\underline{-\frac{1}{k}\log(g-kv) = t + C}$ となる。ここで初期条件 $t = 0$ で $v = 0$ を使うと $\underline{-\frac{1}{k}\log(g) = 0 + C}$ より $C = \underline{-\frac{1}{k}\log g}$ となる。これを代入して式を対数や指数の計算規則により次のように変形すると

$$\log(g-kv) - \log g = -kt, \quad \to \quad \log\frac{g-kv}{g} = -kt, \quad \to \quad 1 - \frac{k}{g}v = e^{-kt}$$

$v = \underline{\frac{g}{k}(1-e^{-kt})}$ を得る。このことから，十分時間が経過すると，質点の速度は一定の値 $\underline{\frac{g}{k}}$ となる。この速度のことを終端速度と呼ぶ。

さらに，v を時間で積分し，積分定数を C とすると $\underline{x = \frac{g}{k}\left(t + \frac{1}{k}e^{-kt}\right) + C}$ となる。ここで初期条件 $t = 0$ で $x = 0$ を使うと $\underline{0 = \frac{g}{k}\left(0 + \frac{1}{k}\times 1\right) + C}$ より $C = \underline{-\frac{g}{k^2}}$ となる。これを代入して $\underline{x = \frac{g}{k}\left(t + \frac{1}{k}(e^{-kt}-1)\right)}$ を得る。

図は教科書の p.34 で $v_\infty = \frac{g}{k}$ としたもの。$\tau = 1/k$ である。