略解

ある自動車に小球を発射する装置がとりつけられている。自動車が静止しているとき，小球は速さ V，地上に対する角度 θ で発射される。この車が速さ u で水平面を走っており，$t=0$ に地点 O を通過したときに小球を前方に発射したところ地点 P に落下した。OP の距離を L とする。点 O を原点 $(0,0)$ にとる。L が最大となる角度での $\cos\theta$ を求めよ。自動車の大きさは無視してよい。重力加速度の大きさを g とする。

自動車の走行する方向を x 軸，鉛直方向を y 軸とする。通常の斜方投射と比較して考えると x 方向の $t=0$ での速度 $=\underline{V\cos\theta+u}$，$y$ 方向の $t=0$ での速度 $=\underline{V\sin\theta}$ である。これから，

$x=\underline{(V\cos\theta+u)t}$, $y=\underline{-(1/2)gt^2+V\sin\theta\, t}$ となる。

この 2 つの式を使って通常の斜方投射と同様に考えると，

$$L=(V\cos\theta+u)\times\frac{2V\sin\theta}{g}$$

となる。

この L は θ の式となる。L が極大となる条件を考えるので，$dL/d\theta=0$ を解く。計算すると

$$\frac{dL}{d\theta}=\frac{2V}{g}\left[(-V\sin\theta)\sin\theta+(V\cos\theta+u)\cos\theta\right]$$

$$(-V\sin\theta)\sin\theta+(V\cos\theta+u)\cos\theta=0$$

となる。$dL/d\theta=0$ は $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を活用すると，$\cos\theta$ を変数とする 2 次方程式となる。

方程式 $\underline{2V(\cos\theta)^2+u\cos\theta-V=0}$

方程式を解く。

$$\cos\theta=\frac{-u\pm\sqrt{u^2+8V^2}}{4V}$$

正しい符号の解を選ぶと以下となる。

$$\cos\theta=\frac{-u+\sqrt{u^2+8V^2}}{4V}$$