電気抵抗の測定

1　レポートを書く前に

この実験で本格的な実験レポートを初めて書くことになりますが，まず書き始める前に，以下の点に注意をしてください。

- 箇条書きにしない
  「テーマ０」で取り扱った円柱試料の体積測定をレポートにする際には，ひな形を配布して，穴埋めでレポートを作成しました。そのため，どうしても「質問に対する答え」と行った形にまとめざるを得ないため，

  - ノギスで測定した際の統計誤差は？
    「$\Delta a = \ldots \mathrm{mm}$」

  といった箇条書き形式になってしまいました。しかし，本来は「報告文書」なのですから，文章でまとめるべきものです。上記の例であれば「ノギスで測定した際の統計誤差は $\Delta a = \ldots \mathrm{mm}$」であった。」となるべきであることになります。

2　概要

概要は，報告文書である実験レポートのまとめですので，

- 過去形にする。
- 測定したことを示す。
- 考察を簡単まとめる。

事が求められます。そのため，レポートの内部（本文）が書き終わってから（すなわち最後に,）書かれるべき部分ということになります。

概要は 5 ∼ 10 行 程度にまとめられることが求められますので，必要最小限の内容にまとめましょう。誤差を小さくするための工夫とか，実験の際に注意しなければならない内容などは，詳細な事項となりますので，本文中でまとめあげてください。

3　物理理論

物理理論を書く目的は,

- 測定対象を明らかにする。
- 実験目的を明らかにする。

ことにあります。したがって,「概要」を書く際とは逆に現在形でまとめましょう。物理理論は普遍ですので，過去でも未来でもありません。

「測定対象を明らかにする」ためには，本実験の場合,「電流」,「電圧」,「電気抵抗」がそもそもなんであるかを説明する必要があります。

- 電流 I
物質中にある荷電粒子（またはそれに代わるもの）が電荷の伝達媒体となり，その流れを指します。本来の定義は，
$$I = \frac{dQ}{dt}$$
であり，時間的に電荷量が変化すればそれが電流なのですが，電気回路を取り扱う場合には，電荷を伝える電子が消えたり増えたりすることはないので、流れとして解釈されます。

- 電圧 V
電圧というよりは起電力と書いた方がいいのでしょうか。この場合，起電力すなわち静電ポテンシャルが生み出す電場によって荷電粒子が力を受け，電流として表れますので，車で言うところのエンジンのような役割を果たしていることになります。

- 電気抵抗 R
単純に抵抗と呼ばれる場合もあります。回路に起電力を入れると，回路中の荷電粒子は起電力によって生み出された電場から力を受けます。したがって，何もなければ荷電粒子は等加速度運動を行うことになります。しかし，実際には等速運動を行っているわけで，その原因が電気抵抗であるということになります。電気抵抗はニューと力学において自由落下を妨げる空気抵抗のような役割を果たしています。

ここの物理量について理解ができたならば，今回の実験の目的について考えてみましょう。電流の本質が荷電粒子の流れであり，起電力はその流れを引き起こしている力であることを法則としてまとめたものが「(電気回路における）キルヒホッフの法則」です。この法則には第 1 法則と第 2 法則があり，それぞれが以下の内容になっています。

- キルヒホッフの第１法則（電流則）
電気回路の任意の分岐点において，電流の値を流れ込む向きの場合を正，流れ出す向きの場合を負とする（またはそれを入れ替えた）場合，各線の電流 I_i の総和は，
$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$
となる。

- キルヒホッフの第２法則（電圧則）
電気回路に任意の閉路を取って電圧の向きを一方向に取った場合，経路に沿った起電力 E_i と電圧降下 $R_j I$ の和は，
$$\sum_{i=1}^{N} E_i = \sum_{j=1}^{N'} R_i I$$
の関係になる。

この法則を使うと，電気抵抗を直列につないだ場合の合成抵抗 R_s は，
$$R = \sum R_i$$
となり，並列につないだ場合の合成抵抗 R_p は，
$$\frac{1}{R_p} = \sum \frac{1}{R_i}$$
という結果を得ることになります。

という事で，物理理論においては，

- 「電気抵抗」とは何か。
- 複数の電気抵抗を用いた場合，合成抵抗の値はどのような法則を用いる事によって得る事ができるのか（この場合は「キルヒホッフの法則」)。
- 実験を行う事によって，何を調べたいのか。

を書かなければならないのことになります。本実験では，調べたい事とはすなわち「合成抵抗の計算式が正しい事を実測をする事によって検証する」ということになります。

4　測定理論

電気抵抗を測定するために何を測定してどのようにして計算するのかを示す必要があります。直接電気抵抗を測定するのが一番精度よく測定できることになるのですが，テスターやデジタルマルチメータでの測定は，結局以下の内容を一つの機器で行っているだけに過ぎませんから，今回は間接測定を行うことになります。

物理学辞典を調べてみると，電気抵抗については次のように示されています。

> 導線の 2 点間に流れる定常電流を I，その間の電位差を V とするとき，
>
> $$R = \frac{V}{I} \tag{1}$$
>
> を 2 点間の電気抵抗あるいは単に抵抗という。抵抗の単位は Ω である。

これでは単にオームの法則ではないかということになりますが，実は続けて，

> V または I があまり大きくない限り，抵抗 R は V または I によらない定数である（オームの法則）。

となっています。つまり，オームの法則の本質は，導体の 2 点間に流れる定常電流とその間の電位差は比例する（$V = RI$）ことを表しており，特定の条件（かなり広い条件ではあるが）の中で成り立つ法則性を示しており，その際，比例定数が電気抵抗に相当しているというわけです[1]。したがって，

- オームの法則を利用して電気抵抗の値を求める。
- したがって，測定するのは抵抗にかけた電圧とそこに流れている電流の値である。

という内容を説明することになります。

5　実験結果

5.1　測定状況

測定理論によれば，電気抵抗 R を知るためには，電圧 V をかけた際の電流値 I を測定すればよいことが分かります。したがって，実験に必要な機器は，

- 被測定物（電気抵抗）
- 測定器具（電流計，電圧計）

ということになります。電気抵抗については抵抗ボードを使いますので，何番のボードであったかを忘れずに書きましょう。電流計，電圧計については，測定のレンジと最小メモリを書くことを忘れないでください。

5.2　電流，電圧の測定と電気抵抗に関する誤差の考え方

電気抵抗の測定については，R_1, R_2, R_s, R_p のいずれに対しても，電圧 V と電流 I を任意の値で測定を行っている事から，同じ方法で求める事ができます。表 1 は電気抵抗を求める為に測定した電圧と電流のデータの一般形です。まず，注意をしなければならないのは，電圧と電流は任意の値で測定されており，同じ値になる（すなわち平均を求める必要のある）物理量は「電気抵抗 R」だけであるという点です。平均を求める必要があるのは電気抵抗 R のみであって，電圧 V や電流 I の平均値には意味はありません。また，電気抵抗の平均を求めてい

[1] それに対して，電気抵抗の定義は先に示した通りで,「定数とは限らない」という内容が含まれています。これは,「半導体」や「絶縁体」において電位差が大きくなった場合などが当てはまります。物性的に考えると，抵抗 R の値は物質の種類および導体の形状によって変化します。断面が一様な導線については，抵抗 R は長さ ℓ に比例し，断面積 S に反比例するので，

$$R = \rho\frac{\ell}{S} \tag{2}$$

であり，比例定数 ρ が物質固有な値となります。ここで，ρ は電気抵抗率であり，体積抵抗率，比抵抗，固有抵抗などとも呼ばれています。

表 1: 電気抵抗の測定例

n	電圧 [mV]	電流 [μA]	抵抗 [Ω]	残差 (λ)	λ^2
1	V_1	I_1	R_1	λ_1	${\lambda_1}^2$
2	V_2	I_2	R_2	λ_2	${\lambda_2}^2$
3	V_3	I_3	R_3	λ_3	${\lambda_3}^2$
4	V_4	I_4	R_4	λ_4	${\lambda_4}^2$
5	V_5	I_5	R_5	λ_5	${\lambda_5}^2$
			$\langle R \rangle$		$\sum {\lambda_i}^2$

ますので，統計誤差（平均誤差）$\varDelta R$ は電気抵抗の平均値 $\langle R \rangle$ と各測定値 R_i との差（残差 λ_i）から求めればよいことになります。

一方，系統誤差 δR の求め方については，電気抵抗を求める (1) 式から，誤差伝搬の式として，

$$\frac{\delta R}{\langle R \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{I}\right)^2} \tag{3}$$

を用いればよい事がわかります。ここで，分子にある δV と δI は，電圧と電流を測定する際の系統誤差（つまりは読み取り限界）の値なのですが，分母にある V と I の値として何を使うかが問題になります。体積測定のときは各測定値の平均を用いましたが，今回測定した電圧 V と電流 I の平均値には意味がない事は前述の通りだからです。

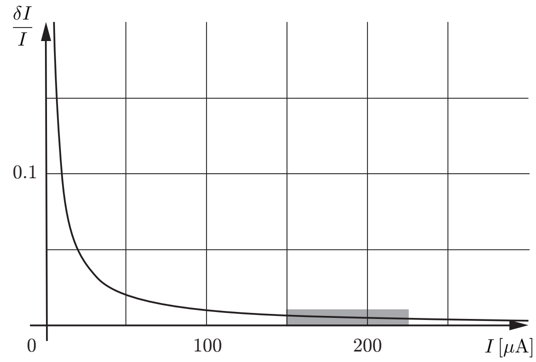

図 1: 電流測定の系統誤差

ここで，測定時の工夫が生きてきます。測定時には電流計の目盛りを $\frac{1}{2} \sim \frac{3}{4}$ の範囲で使用しました。仮に $300\,\mu$A のレンジを使用した場合，メモリの読み方にもよりますが，その系統誤差は $\delta R = 1 \sim 2\,\mu$A となります。図 1 は，測定したレンジに対しての系統誤差の値（相対誤差）を表しています。図 1 の編みがけの部分が測定に使用したレンジに相当するのですが，$\delta I = 1\,\mu$A としたばあいはおよそ 0.5 %，$\delta I = 2\,\mu$A とすれば 1 % ぐらいで安定しています。したがって，指定された測定レンジ内であれば，どの値を使ってもほぼ同じ結果が得られる事になります。一方，電圧の測定にあたっては，自動的にレンジを選ぶように設定をしました。その結果，電圧値の測定は 4 ∼ 5 桁 で測定が行われていますので，$\frac{\delta V}{V}$ の値は大きくても 10^{-4} 程度である事がわかります。電流の測定精度は相対誤差で 10^{-2} 程度ですから，(3) 式より，

$$\frac{\delta R}{\langle R \rangle} \sim \frac{\delta I}{I} \tag{4}$$

と見なしてもいいでしょう。これを踏まえて，測定値の誤差を計算している事を考えれば，分母の値の考え方として，例えば，

- 一番大きく見積もる事ができる V_i のうちの 1 番小さい値の組み合わせ。
- おおよそ代表的と見なす事のできる V_i のうちの 3 番目（真ん中）の値の組み合わせ。

といった考え方ができます。今回は，2 番目の考え方を採用する事にします。

このようにして，実験結果，

$$\begin{aligned} R_1 &= \langle R_1 \rangle \pm \varDelta R_1 \pm \delta R_1\,[\Omega] \\ R_2 &= \langle R_2 \rangle \pm \varDelta R_2 \pm \delta R_2\,[\Omega] \\ R_s &= \langle R_s \rangle \pm \varDelta R_s \pm \delta R_s\,[\Omega] \\ R_p &= \langle R_p \rangle \pm \varDelta R_p \pm \delta R_p\,[\Omega] \end{aligned} \tag{5}$$

が，得られます。

6 解析

比較をするのは，測定によって得られた R_s, R_p の値と，やはり測定によって得られた R_1, R_2 を用いて計算される，合成抵抗 R_S（直列），R_P （並列）の値，

$$\begin{aligned} R_S &= R_1 + R_2 \\ R_P &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned} \tag{6}$$

を比較します。このとき，R_S と R_P の誤差はどのようになるかを考えてみましょう。

6.0.1 直列接続

直列接続の合成抵抗の計算値は，

$$R_S = \langle R_1 \rangle + \langle R_2 \rangle \tag{7}$$

なのですから，統計誤差 ΔR_S，系統誤差 δR_S は，ともに R_1 と R_2 の誤差より，

$$\Delta R_S = \sqrt{(\Delta R_1)^2 + (\Delta R_2)^2}, \qquad \delta R_S = \sqrt{(\delta R_1)^2 + (\delta R_2)^2} \tag{8}$$

と求める事ができます。

6.0.2 並列接続

並列接続の合成抵抗の計算値は，

$$R_P = \frac{\langle R_1 \rangle \cdot \langle R_2 \rangle}{\langle R_1 \rangle + \langle R_2 \rangle} \tag{9}$$

です。したがって，合成抵抗の誤差の計算式は，

$$\frac{\Delta R_P}{{R_P}^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R_1}{\langle R_1 \rangle^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_2}{\langle R_2 \rangle^2}\right)^2}, \qquad \frac{\delta R_P}{{R_P}^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta R_1}{\langle R_1 \rangle^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta R_2}{\langle R_2 \rangle^2}\right)^2} \tag{10}$$

となります。

7 考察

直列接続の測定値 R_s と計算によって得られた値 R_S，並列接続の測定値 R_p と計算によって得られた値 R_P は必ずしも一致はしていないはずですが，かなり近い値になっているものと思われます。この「かなり近い」が「実は同じ」であるのかどうかを判断する根拠となるのが誤差の値です。目安となるが，

「測定値（平均値）から誤差を引いた値」～「測定値（平均値）に誤差を足した値」 (11)

の範囲で，真の値がこの範囲にある確率が 68 % ほどですから，誤差棒が重なっていれば「実は同じ」と判断してもいいでしょう。