

超立方体環グラフと超立方体グラフの 最小2分割幅

准 員 真鍋 義文[†] 正 員 萩原 兼一[†] 正 員 都倉 信樹[†]

The Minimum Bisection Widths of the Cube-Connected Cycles Graph and Cube Graph

Yoshifumi MANABE[†], Associate Member, Ken'ichi HAGIHARA[†] and
Nobuki TOKURA[†], Regular Members

あらまし グラフの最小2分割幅は、VLSIの配線問題を抽象化したグラフの埋めこみ問題における面積や、データの通信関係をそのグラフで抽象化したときの並列アルゴリズムの計算時間の尺度として重要な値である。グラフが与えられたときにその最小2分割幅を求めることは一般にはNP完全である。従って、並列処理アルゴリズムで有用な接続関係などとしてよく使われる超立方体環グラフおよび超立方体グラフなどのグラフについて最小2分割幅を求めることは有用である。頂点数 $n = s \cdot 2^s$ の超立方体環グラフの最小2分割幅は、今まで $O(n/\log n)$ であることだけが知られていたが、本論文では頂点数 $n = h \cdot 2^s$ ($h \geq s$) の超立方体環グラフの最小2分割幅が正確に 2^{s-1} であること、また、頂点数 2^s の超立方体グラフの最小2分割幅は 2^{s-1} であることを示す。本論文の結果は現在までのVLSIの配線面積や並列アルゴリズムの計算時間のオーダーの議論について、今後重要となる詳細な解析の基礎となる。

1. ま え が き

グラフの最小2分割幅は、グラフを2つの頂点数の等しい部分グラフに分割するために取り除くべき辺の最小数である。最小2分割幅は、VLSIの配線問題を抽象化したグラフの埋めこみ問題における面積の下界を与える値である⁽⁵⁾。また、並列アルゴリズムにおいて、プロセッサを頂点、プロセッサ間の接続関係を辺で表すと並列アルゴリズムのデータの通信関係をグラフで表現できるが、並列アルゴリズムの計算時間の下界などの議論にそのグラフの最小2分割幅を用いることもある⁽⁵⁾。

グラフ G が与えられたときにその最小2分割幅を求めることは重要な問題であるが、この問題は一般にはNP完全である⁽¹⁾。従って、並列処理アルゴリズムで有用な接続関係としてよく使われる超立方体環グラフ⁽³⁾ および超立方体グラフ⁽²⁾ などのグラフについて最小2分割幅を求めることは有用である。頂点数 $n = s \cdot 2^s$

の超立方体環グラフの最小2分割幅が $O(n/\log n)$ であることだけが今まで知られていた⁽³⁾ が、本論文ではもっと一般的に、頂点数 $n = h \cdot 2^s$ ($h \geq s$) の頂立方体環グラフの最小2分割幅が 2^{s-1} であること、また頂点数 2^s の超立方体グラフの最小2分割幅が 2^{s-1} であることを示す。本論文の結果は、現在までのVLSIの配線面積や並列アルゴリズムの計算時間のオーダーの議論について、今後重要となる詳細な解析の基礎となる。

2. 諸 定 義

本論文で取り扱うグラフ G はすべて無向グラフであり、頂点集合 V と辺集合 E の対 (V, E) で表す。 E は頂点の非順序対 (v_1, v_2) ($v_1, v_2 \in V$) の集合である。集合 S の要素数を $|S|$ で表す。

頂点 v と v' の間の道とは、相異なる頂点と辺とが交互に並ぶ系列 $v_0 x_0 v_1 \cdots x_{n-1} v_n$ で、 $n \geq 0$, $v_0 = v$, $v_n = v'$, $v_i \in V$ ($i = 0, \dots, n$), $x_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$ ($i = 0, \dots, n-1$) を満足するものである。 v, v' をこの道の端点と呼ぶ。 $n = 0$, すなわち系列 v_0 も道である。この系列中の部分系列 $v_i x_i v_{i+1} \cdots v_{j-1} x_{j-1} v_j$ ($j \geq i$) がある辺集合 $E' (\subseteq E)$ に対して $x_k \in E'$ ($k = i$,

[†]大阪大学基礎工学部情報工学科, 豊中市
Faculty of Engineering Science, Osaka University,
Toyonaka-shi, 560 Japan

$i+1, \dots, j-1$ を満足するときこの部分系列が E' に属する辺のみを用いて構成されているという意味で $v_i \sim (E') \sim v_j$ と表す. 頂点集合 V, V' に対して, V と V' の間の道とはある2頂点 $v \in V, v' \in V'$ に関する v と v' の間の道である. V と V' の間に1対1の道が存在するとは, $|V|=|V'|$ で, 端点がすべて相異なる $|V|$ 個の道が存在することをいう. これら $|V|$ 個の道が互いに辺を共有していないとき, V と V' の間に辺を共有しない1対1の道が存在するという.

また, 非負整数 l, p に対して $\text{bit}_p(l)$ を l の2進表現の 2^p の係数とする. ただし $l < 2^p$ のときは $\text{bit}_p(l) = 0$ である.

3. 最小2分割幅

グラフ $G=(V, E)$ の2分割とは, $V=V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset, ||V_1|-|V_2|| \leq 1$ を満足する. G の頂点集合 V の部分集合の対 (V_1, V_2) のことである. G のある2分割 (V_1, V_2) に対し,

$E(V_1, V_2) = \{(v_1, v_2) \in E \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ の要素をこの2分割の分割辺と呼ぶ. また, $|E(V_1, V_2)|$ をこの2分割の分割幅という. グラフ G に対し, 分割幅が最小になる G の2分割を G の最小2分割(minimum bisection)と呼び, その分割幅を G の最小2分割幅と呼び, $\text{MBW}(G)$ で表す.

4. 超立方体環グラフの最小2分割幅

超立方体環グラフの定義は文献[3]にいくつか示されているが, 本論文ではそのうち最も広義の定義を採用する. 長さ h の s 次元超立方体環グラフ $\text{CCC}_{s,h}=(V, E)$ (ただし h, s は $h \geq s \geq 1$ を満たす整数である)とは, 以下のように定義する無向グラフである. $\text{CCC}_{s,h}$ の各頂点は非負整数の順序対 $[l, p]$ で唯一に識別することにし, この $[l, p]$ のことをアドレスと呼ぶ.

$$V = \{[l, p] \mid 0 \leq l < 2^s, 0 \leq p < h\}$$

$$E = \bigcup_{p=0}^{s-1} E_p \cup E_c$$

ここで,

$$E_c = \{([l, p_1], [l, p_2]) \mid [l, p_1], [l, p_2] \in V, p_1 = p_2 + 1 \pmod{h}\}$$

$$E_p = \{([l_1, p], [l_2, p]) \mid [l_1, p], [l_2, p] \in V, \text{bit}_p(l_1) = 0, l_2 = l_1 + 2^p\}$$

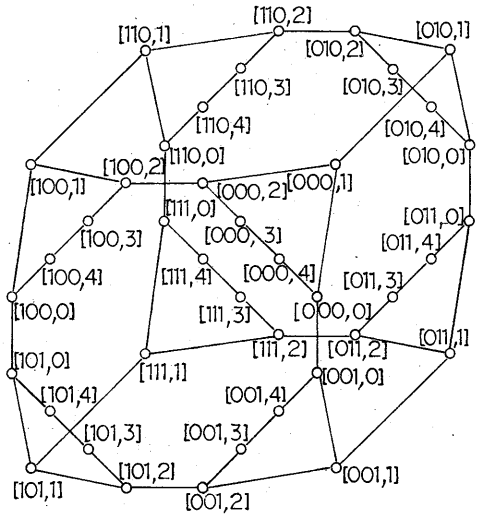
である. E_c の要素を環辺, $E_p (0 \leq p < s)$ の要素を p 次元の超立方体辺と呼ぶ. 定義より,

$$|V| = h \cdot 2^s, |E| = (2h + s) 2^{s-1}$$

である. $\text{CCC}_{s,h}$ のグラフは h 個の頂点から成る環が 2^s 個存在して, それらが互いに s 次元の超立方体状に結合した形をしている. $\text{CCC}_{3,5}$ のグラフを図1に示す.

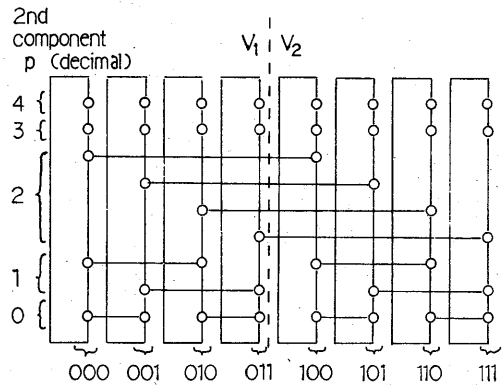
超立方体環グラフ $\text{CCC}_{s,h}$ の最小2分割幅は 2^{s-1} である. 以下にその証明を記す.

[補題1] $\text{MBW}(\text{CCC}_{s,h}) \leq 2^{s-1}$. $\square$



address $[l, p]$ 1st component l binary
2nd component p decimal

(a)



(b)

図1 $\text{CCC}_{3,5}$ (2通りの表示方法で示す)
破線は $\text{CCC}_{3,5}$ の最小2分割の例

Fig. 1 - Two different representations of $\text{CCC}_{3,5}$.
Dashed line is an example of minimum bisection of $\text{CCC}_{3,5}$.

(証明) $CCC_{s,h}=(V, E)$ とする.

$$V_1=\{[l, p] \mid 0 \leq l < 2^{s-1}, 0 \leq p < h\}$$

$$V_2=\{[l, p] \mid 2^{s-1} \leq l < 2^s, 0 \leq p < h\}$$

とすると (V_1, V_2) は $CCC_{s,h}$ の 2 分割であり,

$$E(V_1, V_2)=\{([l, s-1], [l+2^{s-1}, s-1]) \mid 0 \leq l < 2^{s-1}\}$$

すなわち $E(V_1, V_2)=E_{s-1}$ となり, $|E(V_1, V_2)|=2^{s-1}$ である. 従って, $MBW(CCC_{s,h}) \leq 2^{s-1}$ である.

(証明終)

[補題 2] $CCC_{s,h}$ の任意の 2 分割 (V_1, V_2) に対して, ある頂点集合 V'_1, V'_2

$$V'_i \subseteq V_i, |V'_i|=2^{s-2} \quad (i=1, 2)$$

が存在して, V'_1, V'_2 の間に互いに辺を共有しない 2^{s-1} 個の道が存在する. $\square$

補題 2 が成立したと仮定する. このとき V'_1 と V'_2 の間の任意の道に対して, その道を構成する辺のうちの少なくとも 1 つは 2 分割 (V_1, V_2) の分割辺である. V'_1 と V'_2 の間に互いに辺を共有しない道は 2^{s-1} 個存在するので, 2 分割 (V_1, V_2) の分割辺は少なくとも 2^{s-1} 個存在する. これが任意の 2 分割に対して成立するので, $MBW(CCC_{s,h}) \geq 2^{s-1}$ である. 補題 1 より $MBW(CCC_{s,h}) \leq 2^{s-1}$ が成立つので, 次の定理が成立つ.

[定理 1] $MBW(CCC_{s,h})=2^{s-1}$. $\square$

補題 2 の証明の準備として, 冗長度 $\langle u \rangle$ の t 次元超立方体弧と呼ぶグラフ $CCA_{t,\langle u \rangle}=(V, E)$ を次のように定義する. ここで, t は正整数で $\langle u \rangle$ は t 次元ベクトル $\langle u_0, u_1, \dots, u_{t-1} \rangle$ であり, 各成分 u_p ($p=0, 1, \dots, t-1$) は非負整数である.

$$V=\{[l, p, q] \mid 0 \leq l < 2^t, 0 \leq p < t, 0 \leq q \leq u_p\}$$

$$E=\bigcup_{p=0}^{t-1} E_p \cup E_A$$

ここで,

$$\begin{aligned} E_A &= \{([l, p, q_1], [l, p, q_2]) \mid [l, p, q_1], [l, p, q_2] \in V, q_2 = q_1 + 1\} \\ &\quad \cup \{([l, p_1, u_{p_1}], [l, p_2, 0]) \mid [l, p_1, u_{p_1}], [l, p_2, 0] \in V, p_2 = p_1 + 1\} \\ E_p &= \{([l_1, p, 0], [l_2, p, 0]) \mid [l_1, p, 0], [l_2, p, 0] \in V, \text{bit}_p(l_1) = 0, \\ &\quad l_2 = l_1 + 2^p\} \end{aligned}$$

である. E_A の要素を弧辺 (arc edge), E_p の要素を p 次元の超立方体辺 (cube edge) と呼ぶ. 定義より,

$$|V| = \left(t + \sum_{p=0}^{t-1} u_p\right) 2^t, \quad |E| = |V| + (t-2) 2^{t-1}$$

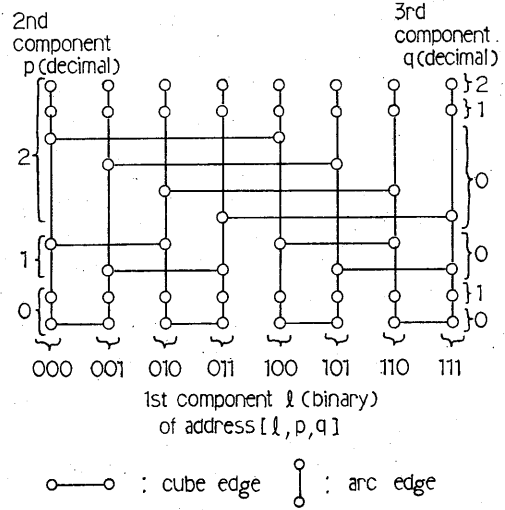


図 2 $CCA_{3, \langle 1, 0, 2 \rangle}$
Fig. 2 - $CCA_{3, \langle 1, 0, 2 \rangle}$.

である. $CCA_{t,\langle u \rangle}$ において, 各 q ($0 \leq q \leq u_{t-1}$) に対する端頂点集合 T_q を,

$$T_q = \{[l, t-1, q] \mid 0 \leq l < 2^t\}$$

と定義する. $CCA_{t,\langle u \rangle}$ は $CCC_{s,h}$ の部分グラフである. $t, \langle u \rangle$ と s, h の関係は後述する. 超立方体弧の例として, $CCA_{3, \langle 1, 0, 2 \rangle}$ のグラフを図 2 に示す. 超立方体弧 $CCA_{t,\langle u \rangle}$ において, 任意の q ($0 \leq q \leq u_{t-1}$) に対する端頂点集合 T_q から, 以下の条件を満足する任意の頂点集合 V_P, V_N を選ぶ.

$$V_P \subseteq T_q, V_N \subseteq T_q, |V_P| = |V_N|, V_P \cap V_N = \emptyset$$

V_P (又は V_N) の要素を正頂点 (又は負頂点) と呼び, P (又は N) の印をつける.

[補題 3] 超立方体弧 $CCA_{t,\langle u \rangle}$ において, 任意の q ($0 \leq q \leq u_{t-1}$) に対する端頂点集合を T_q とする. T_q の互いに素な任意の部分集合 V_P, V_N (但し $|V_P| = |V_N|$) に対し, V_P と V_N の間に辺を共有しない 1 対 1 の道が存在する. $\square$

(証明) $|V_P| = |V_N| = x$ とする. このとき, $0 \leq x \leq 2^{t-1}$ である.

t に関する帰納法で証明する.

(1) $t=1$ のとき

$0 \leq x \leq 2^{t-1}$ ゆえ, $x=0$ または 1 である. $x=0$ のときに成立するのは明らかである. $x=1$ のときは,

$$T_q = \{[0, 0, q], [1, 0, q]\} \text{ であるので, } V_P = \{[1, 0, q]\}, V_N = \{[0, 0, q]\}$$

または,

$$V_P = \{[1, 0, q]\}, V_N = \{[0, 0, q]\}$$

である。\$E_A\$および\$E_0\$をそれぞれ弧辺集合および0次元超立方体辺集合とすれば、どちらの場合にも、\$[0, 0, q] \sim (E_A) \sim [0, 0, 0] \sim (E_0) \sim [1, 0, 0] \sim (E_A) \sim [1, 0, q]\$

という道が存在するので、\$V_P\$と\$V_N\$の間に1対1の道が存在する。従って\$t=1\$のときには成立する。

- (2) \$t=i(i \ge 1)\$のとき成立すると仮定する。任意の\$CCA_{i+1, \langle u \rangle}\$で\$T_q\$の\$2^{i+1}\$個の頂点を

$$T_{q,0} = \{[l, i, q] \mid 0 \leq l < 2^i\}$$

$$T_{q,1} = \{[l+2^i, i, q] \mid 0 \leq l < 2^i\}$$

の\$2^i\$個ずつに分割する。\$T_{q,0}\$、\$T_{q,1}\$に正頂点がそれぞれ\$x_0\$、\$x_1\$個、負頂点がそれぞれ\$y_0\$、\$y_1\$個ずつ存在するとする(\$x_0+x_1=y_0+y_1=x\$である)。 $x_0-y_0=z$ とすると\$y_1-x_1=-z\$である。一般性を失うことなく\$z \ge 0\$と仮定できる(\$z < 0\$のときは\$T_{q,0}\$、\$T_{q,1}\$を入れかえればよい)。

このとき、\$([l, i, q], [l+2^i, i, q])\$ (\$0 \le l < 2^i\$)の\$2^i\$個の頂点对のうちで、

(場合1) \$[l, i, q]\$が正頂点で、\$[l+2^i, i, q]\$が負頂点である。

(場合2) \$[l, i, q]\$が正頂点で、\$[l+2^i, i, q]\$が正頂点でも負頂点でもない。

(場合3) \$[l, i, q]\$が正頂点でも負頂点でもなく、\$[l+2^i, i, q]\$が負頂点である。

の3つのいずれかが成立するような頂点对を任意に\$z\$個選ぶ。

〔頂点对の存在〕

上記のような頂点对は少なくとも\$z\$個は存在する。なぜならば、\$[l, i, q]\$が正頂点であれば\$[l+2^i, i, q]\$が正頂点でない限り、(場合1)か(場合2)が成立する。従って、(場合1)か(場合2)の成立する頂点对が少なくとも\$(x_0-x_1)\$個は存在する。同様に、\$[l+2^i, i, q]\$が負頂点であれば\$[l, i, q]\$が負頂点でない限り、(場合1)か(場合3)が成立する。従って、(場合1)か(場合3)の成立する頂点对が少なくとも\$(y_1-y_0)\$個は存在する。\$x_0-x_1\$個、\$(y_1-y_0)\$個のうちでは(場合1)が2重に数えられているので、(場合1)または(場合2)または(場合3)の成立する頂点对は少なくとも、

$$\begin{aligned} & \{(x_0-x_1)+(y_1-y_0)\}/2 \\ &= \{(x_0-y_0)-(x_1-y_1)\}/2 \\ &= (z+z)/2 = z \end{aligned}$$

個は存在する。

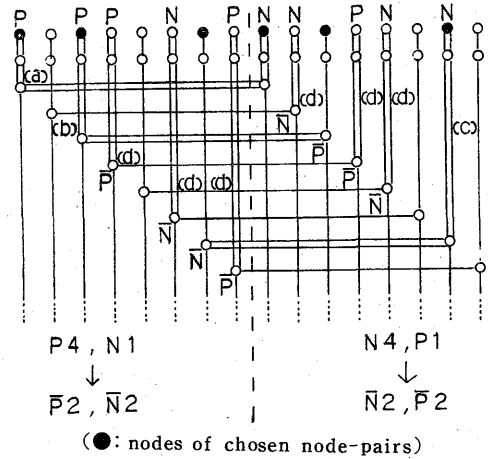


図3 道の決め方
Fig. 3-Decision of paths.

〔正頂点、負頂点からの道の決め方〕

選んだ\$z\$個の頂点对のおのおのに対して、次の操作を行う。

(場合1の成立するとき) \$[l, i, q] \sim (E_A) \sim\$

\$[l, i, 0] \sim (E_i) \sim [l+2^i, i, 0] \sim (E_A) \sim [l+2^i, i, q]\$

という、正頂点と負頂点とを結ぶ道を選ぶ(図3(a)の道)。

(場合2の成立するとき) \$[l+2^i, i, 0]\$を新たな正頂点とし、\$\bar{P}\$の印をつける。\$[l, i, q]\$からこの新たな正頂点へは、

\$[l, i, q] \sim (E_A) \sim [l, i, 0] \sim (E_i) \sim [l+2^i, i, 0]\$

という道を選ぶ(図3(b)の道)。

(場合3の成立するとき) \$[l, i, 0]\$を新たな負頂点とし、\$\bar{N}\$の印をつける。\$[l+2^i, i, q]\$からこの新たな負頂点へは、

\$[l+2^i, i, q] \sim (E_A) \sim [l+2^i, i, 0] \sim (E_i) \sim [l, i, 0]\$

という道を選ぶ(図3(c)の道)。

そして、\$T_q\$の残りの頂点のうちの正頂点と負頂点に対しては、次の操作を行う。

(場合4) \$[l, i, q]\$ (\$0 \le l < 2^{i+1}\$)が正(又は負)頂点のとき

\$[l, i, 0]\$を新たな正(又は負)頂点とし\$\bar{P}\$ (又は\$\bar{N}\$)の印をつける。\$[l, i, q]\$からこの新たな正(又は負)頂点へは、

\$[l, i, q] \sim (E_A) \sim [l, i, 0]\$

という道を選ぶ(図3(d)の道)。

上記の過程で選んだ道はすべて同じ辺を共有せず、しかも E_i の辺と $[l, i, q]$ から $[l, i, 0]$ まで ($0 \leq l < 2^{i+1}$) の弧辺のみから成っている。

$\{\bar{P}, \bar{N}$ の分布

$$T_{0,0} = \{[l, i, 0] \mid 0 \leq l < 2^i\}$$

のうちで $\bar{P}$ (又は $\bar{N}$) の印のついた頂点の集合を $V_P^{(0)}$ (又は $V_N^{(0)}$),

$$T_{0,1} = \{[l, i, 0] \mid 2^i \leq l < 2^{i+1}\}$$

のうちで $\bar{P}$ (又は $\bar{N}$) の印のついた頂点の集合を $V_P^{(1)}$ (又は $V_N^{(1)}$) とすると,

$$|V_P^{(0)}| = |V_N^{(0)}|, |V_P^{(1)}| = |V_N^{(1)}|$$

が成立つ。なぜならば、 z 個の頂点对のうちそれぞれ z_1, z_2, z_3 個 ($z_1 + z_2 + z_3 = z$) が (場合 1), (場合 2), (場合 3) であるとすると, $T_{q,0}$ の頂点 $[l, i, q]$ ($0 \leq l < 2^i$) が正頂点であるとき, (場合 4) のときのみ $[l, i, 0]$ に $\bar{P}$ の印がつき, (場合 1), (場合 2) のときは $[l, i, 0]$ に $\bar{P}$ の印がつかないので,

$$|V_P^{(0)}| = x_0 - z_1 - z_2$$

が成立つ。 $[l, i, q]$ ($0 \leq l < 2^i$) が負頂点のときは必ず $[l, i, 0]$ に $\bar{N}$ の印がつき, また $[l, i, q]$ ($0 \leq l < 2^i$) が正頂点でも負頂点でもなくても (場合 3) のときは $[l, i, 0]$ に $\bar{N}$ の印がつく。従って,

$$|V_N^{(0)}| = y_0 + z_3$$

が成立つ。 $x_0 - y_0 = z$ であるので,

$$|V_P^{(0)}| - |V_N^{(0)}| = x_0 - y_0 - (z_1 + z_2 + z_3) = 0$$

が成立つ。同様に,

$$|V_P^{(1)}| = x_1 + z_2, |V_N^{(1)}| = y_1 - z_1 - z_3$$

より,

$$|V_P^{(1)}| = |V_N^{(1)}|$$

が成立つ。

$\{t = i$ の場合への帰着

ここで, $CCA_{i+1, \langle u \rangle}$ から i 次元の超立方体辺の集合 E_i および T_0 以外の端頂点集合を取り除くと, $CCA_{i+1, \langle u \rangle}$ は 2 つの連結成分に分かれる。頂点のアドレスを以下に示すようにつけかえると, 各連結成分は超立方体弧 $CCA_{i, \langle u' \rangle}^{(0)}$, $CCA_{i, \langle u' \rangle}^{(1)}$ となる。ただし i 次元ベクトル $\langle u' \rangle = \langle u'_0, u'_1, \dots, u'_{i-2}, u'_{i-1} \rangle = \langle u_0, u_1, \dots, u_{i-2}, u_{i-1} + 1 \rangle$ である。

$$CCA_{i, \langle u' \rangle}^{(k)} = (\bar{V}^{(k)}, \bar{E}^{(k)}) \quad (k = 0, 1)$$

ρ を V の頂点のアドレスから $\bar{V}^{(0)} \cup \bar{V}^{(1)}$ の頂点のアドレスへの関数とする。

$$\rho([l, p, q])$$

$$[l, i-1, u_{i-1}+1] \in \bar{V}^{(0)}$$

$$= \begin{cases} p = i-1, q = 0, 0 \leq l < 2^i \text{ のとき} \\ [l-2^i, i-1, u_{i-1}+1] \in \bar{V}^{(1)} \\ p = i-1, q = 0, 2^i \leq l < 2^{i+1} \text{ のとき} \\ [l, p, q] \in \bar{V}^{(0)} \\ p \neq i-1, 0 \leq l < 2^i \text{ のとき} \\ [l-2^i, p, q] \in \bar{V}^{(1)} \\ p \neq i-1, 2^i \leq l < 2^{i+1} \text{ のとき} \end{cases}$$

図 2 の $CCA_{3, \langle 1, 0, 2 \rangle}$ に対してこのアドレスのつけかえを 行った例を図 4 に示す。

$CCA_{i, \langle u' \rangle}^{(0)}$, $CCA_{i, \langle u' \rangle}^{(1)}$ の端頂点集合をそれぞれ $T_q^{(0)}$, $T_q^{(1)}$ ($0 \leq q \leq u'_{i-1}$) とすると,

$$T_{u'_{i-1}-1}^{(0)} = T_{0,0}, T_{u'_{i-1}-1}^{(1)} = T_{0,1}$$

である。従って, $V_P^{(0)}$, $V_N^{(0)}$ (又は $V_P^{(1)}$, $V_N^{(1)}$) は $T_{u'_{i-1}-1}^{(0)}$ (又は $T_{u'_{i-1}-1}^{(1)}$) の互いに素で, 要素数の等しい部分集合である。帰納法の仮定により, $V_P^{(0)}$ と $V_N^{(0)}$ の間, および $V_P^{(1)}$ と $V_N^{(1)}$ の間に辺を共有しない 1 対 1 の道が存在する。

$CCA_{i+1, \langle u \rangle}$ の V_P , V_N の頂点のうち, (場合 1) として選んだ頂点对に対しては, 正頂点と負頂点の間の道が存在する。残りの正 (又は負) 頂点に対しては, $V_P^{(0)}$ あるいは $V_P^{(1)}$ の頂点 (又は $V_N^{(0)}$ あるいは $V_N^{(1)}$ の頂点) への道が存在するので, これらの正頂点と負頂点の間にも 1 対 1 の道が存在する。従って V_P と V_N の間には 1 対 1 の道が存在する。これらの道が互いに辺を共有しないのは上記の道の選び方より明らかである。

(補題 3 の証明終)

(補題 2 の証明)

$CCC_{s, h}$ に対して頂点集合 $V_{p,0}, V_{p,1}, \bar{V}_p$ ($0 \leq p < h$) を

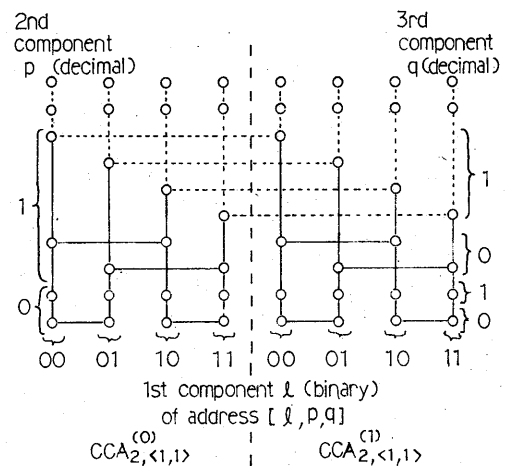


図 4 $CCA_{3, \langle 1, 0, 2 \rangle}$ から得られる 2 つの $CCA_{2, \langle 1, 1 \rangle}$

Fig. 4 - Two $CCA_{2, \langle 1, 1 \rangle}$ s derived from $CCA_{3, \langle 1, 0, 2 \rangle}$.

表1 V'_1, V'_2 の選び方

場合	条 件	V'_1	V'_2	分離次元 r
(1)	$\exists \bar{p} (0 \leq \bar{p} < h)$ $ V_{\bar{p},0} \cap V_1 \geq 2^{s-2}$ かつ $ V_{\bar{p},1} \cap V_2 \geq 2^{s-2}$	$V_{\bar{p},0} \cap V_1$	$V_{\bar{p},1} \cap V_2$	$0 \leq \bar{p} < s$ のとき $\bar{p}$
(2)	$\exists \bar{p} (0 \leq \bar{p} < h)$ $ V_{\bar{p},0} \cap V_2 \geq 2^{s-2}$ かつ $ V_{\bar{p},1} \cap V_1 \geq 2^{s-2}$	$V_{\bar{p},1} \cap V_1$	$V_{\bar{p},0} \cap V_2$	$s \leq \bar{p} < h$ のとき $s-1$
(3)	$\exists \bar{p} (0 \leq \bar{p} < h-1)$ $ V_{\bar{p},0} \cap V_1 > 2^{s-2}$ かつ	$V_{\bar{p},0} \cap V_1$	$V_{\bar{p}+1,1} \cap V_2$	$s-1$
	$ V_{\bar{p},1} \cap V_1 > 2^{s-2}$ かつ			
	$ V_{\bar{p}+1,0} \cap V_2 > 2^{s-2}$ かつ			
(4)	$ V_{\bar{p}+1,1} \cap V_2 > 2^{s-2}$	$V_{\bar{p},0} \cap V_1$	$V_{\bar{p}+1(1)} \cap V_2$	$\bar{p}$
	(3-1) $\bar{p} \geq s-1$			
	(3-2) $ V_{\bar{p}+1(0)} \cap V_2 \geq 2^{s-2}$			
(4)	$\exists \bar{p} (0 \leq \bar{p} < h-1)$ $ V_{\bar{p},0} \cap V_2 > 2^{s-2}$ かつ	$V_{\bar{p}+1,0} \cap V_1$	$V_{\bar{p},1} \cap V_2$	$s-1$
	$ V_{\bar{p},1} \cap V_2 > 2^{s-2}$ かつ			
	$ V_{\bar{p}+1,0} \cap V_1 > 2^{s-2}$ かつ			
(4)	$ V_{\bar{p}+1,1} \cap V_1 > 2^{s-2}$	$V_{\bar{p}+1(0)} \cap V_1$	$V_{\bar{p},1} \cap V_2$	$\bar{p}$
	(4-1) $\bar{p} \geq s-1$			
	(4-2) $ V_{\bar{p}+1(0)} \cap V_1 \geq 2^{s-2}$			
(4)	$ V_{\bar{p}+1,1} \cap V_1 > 2^{s-2}$	$V_{\bar{p}+1(1)} \cap V_1$	$V_{\bar{p},0} \cap V_2$	$\bar{p}$
	(4-3) $ V_{\bar{p}+1(1)} \cap V_1 \geq 2^{s-2}$			

次のように定義する.

$0 \leq p < s$ のとき

$$V_{p,0} = \{(\ell, p) \mid 0 \leq \ell < 2^s, \text{bit}_p(\ell) = 0\}$$

$$V_{p,1} = \{(\ell, p) \mid 0 \leq \ell < 2^s, \text{bit}_p(\ell) = 1\}$$

$$\bar{V}_p = V_{p,0} \cup V_{p,1}$$

$s \leq p < h$ のとき

$$V_{p,0} = \{(\ell, p) \mid 0 \leq \ell \leq 2^s, \text{bit}_{s-1}(\ell) = 0\}$$

$$V_{p,1} = \{(\ell, p) \mid 0 \leq \ell < 2^s, \text{bit}_{s-1}(\ell) = 1\}$$

$$\bar{V}_p = V_{p,0} \cup V_{p,1}$$

このとき,

$$|V_{p,0}| = |V_{p,1}| = 2^{s-1} \quad (0 \leq p < h),$$

$$V = \bigcup_{p=0}^{h-1} (V_{p,0} \cup V_{p,1})$$

である. また, 頂点集合 $V_{p+1(0)}, V_{p+1(1)} (0 \leq p < s-1)$ を次のように定義する.

$$V_{p+1(0)} = \{(\ell, p+1) \mid 0 \leq \ell < 2^s, \text{bit}_p(\ell) = 0\}$$

$$V_{p+1(1)} = \{(\ell, p+1) \mid 0 \leq \ell < 2^s, \text{bit}_p(\ell) = 1\}$$

このとき,

$$|V_{p+1(0)}| = |V_{p+1(1)}| = 2^{s-1},$$

$$\bar{V}_{p+1} = V_{p+1(0)} \cup V_{p+1(1)} \quad (0 \leq p < s-1)$$

である.

(V'_1, V'_2 の選び方)

V'_1, V'_2 の選び方を表1に示す. 表の左記の条件が成立しているときに, その行の V'_1 の欄の頂点集合のうちの任意の 2^{s-2} 個の頂点を V'_1, V'_2 の欄の頂点集合のうちの任意の 2^{s-2} 個の頂点を V'_2 として選ばばよい.

まず, 場合(1), (2), (3), (4)のいずれかが必ず成立することおよび, 場合(3)が成立つときは場合(3-1), (3-2), (3-3)のいずれかが必ず成立することを証明する. 場合(4)についての証明は場合(3)について証明と同様なので省略する.

場合(1), (2)が成立しないときには, 任意の $p (0 \leq p < h)$ に対して,

$$(|V_{p,0} \cap V_1| < 2^{s-2} \text{ または } |V_{p,1} \cap V_2| < 2^{s-2}) \text{ かつ}$$

$$(|V_{p,0} \cap V_2| < 2^{s-2} \text{ または } |V_{p,1} \cap V_1| < 2^{s-2}) \quad (1)$$

が成立する.

$$|V_{p,i} \cap V_1| + |V_{p,i} \cap V_2| = 2^{s-1} \quad (i = 0, 1) \quad (2)$$

より, $|V_{p,i} \cap V_1| < 2^{s-2}$ かつ $|V_{p,i} \cap V_2| < 2^{s-2}$ ($i = 0, 1$) が成立しないことから, 式(1)を変形すると, 任意の $p (0 \leq p < h)$ に対して,

$$(|V_{p,0} \cap V_1| < 2^{s-2} \text{ かつ } |V_{p,1} \cap V_1| < 2^{s-2}) \text{ または}$$

$$(|V_{p,0} \cap V_2| < 2^{s-2} \text{ かつ } |V_{p,1} \cap V_2| < 2^{s-2}) \quad (3)$$

となる. 再び式(2)を使うと式(3)は, 任意の $p (0 \leq p < h)$ に対して,

$$(|V_{p,0} \cap V_1| > 2^{s-2} \text{ かつ } |V_{p,1} \cap V_1| > 2^{s-2}) \quad (4)$$

または,

$$(|V_{p,0} \cap V_2| > 2^{s-2} \text{ かつ } |V_{p,1} \cap V_2| > 2^{s-2}) \quad (5)$$

となる. このとき, すべての $p (0 \leq p < h)$ に対して式(4)のみが成立つ, という事はない. なぜならば,

$$V_1 = \bigcup_{p=0}^{h-1} ((V_{p,0} \cap V_1) \cup (V_{p,1} \cap V_1))$$

であり, $V_{p,i} \cap V_{q,j} = \emptyset$ ($p \neq q$ または $i \neq j$) である

ので、もし式(4)のみが成立すれば、 $|V_1| > h \cdot 2^{s-1}$ となり、 (V_1, V_2) が2分割であることに反する。同様に式(5)のみが成立するというものもない。従って、ある $\bar{p}$ ($0 \leq \bar{p} < h-1$) が存在して、 $(\bar{p}+1)$ に対しては式(5)が、 $\bar{p}$ に対しては式(4)が成立する(場合(3))、あるいは $(\bar{p}+1)$ に対しては式(4)が、 $\bar{p}$ に対しては式(5)が成立する(場合(4))。

場合(3)が成立し、場合(3-1)が成立しないとき、すなわち $\bar{p} < s-1$ のとき、

$$V_{\bar{p}+1,0} \cup V_{\bar{p}+1,1} = \bar{V}_{\bar{p}+1} = V_{\bar{p}+1(0)} \cup V_{\bar{p}+1(1)}$$

である。従って、 $|V_{\bar{p}+1} \cap V_2| > 2^{s-1}$ が成立し、

$$|V_{\bar{p}+1(0)} \cap V_2| \geq 2^{s-2} \text{ (場合(3-2)) または}$$

$$|V_{\bar{p}+1(1)} \cap V_2| \geq 2^{s-2} \text{ (場合(3-3))}$$

が成立する。

(V'_1, V'_2 の性質)

表1のように V'_1, V'_2 を選べば、表1に記した分離次元を r とすると、 V'_1 と V'_2 はそれぞれ頂点のアドレスの第一成分 l の $\text{bit}_r(l)$ が0の集合と1の集合である。 $\text{CCC}_{h,s}$ から r 次元の超立方体辺の集合 E_r を除去したときに $\text{CCC}_{h,s}$ は2つの連結成分に分かれるが、その一方はアドレスの第一成分 l の $\text{bit}_r(l) = 0$ の頂点のみから成り、他方は $\text{bit}_r(l) = 1$ の頂点のみから成る。これらの連結成分をそれぞれ G_0, G_1 とおく。一般性を失うことなく、 V'_1 の方が $\text{bit}_r(l) = 0$ と仮定できる。このとき、 G_0 上で $V_{r,0}$ の各頂点 v に対し、 v と V'_1 の頂点との間の道が存在し、それら 2^{s-1} 個の道が互いに辺を共有せず、かつ G_1 上で $V_{r,1}$ の各頂点 v' に対し、 v' と V'_2 の頂点との間の道が存在し、それら 2^{s-1} 個の道が互いに辺を共有しなければ、 V'_1 から $V_{r,0}$ を経て E_r の辺を通り、 $V_{r,1}$ を経て V'_2 への、互いに辺を共有しない 2^{s-1} 個の道が存在する。以下では G_0 上での V'_1 と $V_{r,0}$ との間の道の選び方を示す。

(連結成分 G_0 からの $\text{CCA}_{s-1, \langle u \rangle}$ の構成)

G_0 の頂点のアドレスを以下に示すようにつけかえると、 G_0 の部分グラフとして $\text{CCA}_{s-1, \langle u \rangle} = \langle \bar{V}, \bar{E} \rangle$ を構成できる。ここで、 $(s-1)$ 次元ベクトル $\langle u \rangle = \langle u_0, u_1, \dots, u_{s-2} \rangle$ の各成分 u_i ($i=0, 1, \dots, s-2$) は次のようになる。

$$(i) \quad r = s-1 \text{ のとき } u_i = \begin{cases} h-s+1 & i=s-2 \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

$$(ii) \quad r = 0 \text{ のとき } u_i = \begin{cases} 1 & i=s-2 \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

$$(iii) \quad \text{その他} \quad u_i = \begin{cases} h-s & i=r-1 \\ 1 & i=s-2 \end{cases}$$

G_0 の頂点を $V(G_0)$ とすると、 $V(G_0)$ のうちで、 $\text{CCA}_{s-1, \langle u \rangle}$ を構成する頂点 V' は

$$V' = \begin{cases} V(G_0) & r \neq 0 \text{ のとき} \\ \{(l, p) \in V(G_0) \mid p < s\} & r = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。 δ を V' の頂点のアドレスから $\bar{V}$ の頂点のアドレスへの関数とすると、

$$\delta((l, p)) = \begin{cases} [f_r(l), r-1-p \pmod{s}, 0] & 0 \leq p < s, p \neq r \text{ のとき} \\ [f_r(l), s-2, u_{s-2}] & p = r \text{ のとき} \\ [f_r(l), r-1, h-p] & p \geq s, r \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

である。ただし、

$$f_r(l) = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq r}}^{s-1} \text{bit}_p(l) 2^{r-1-p \pmod{s}}$$

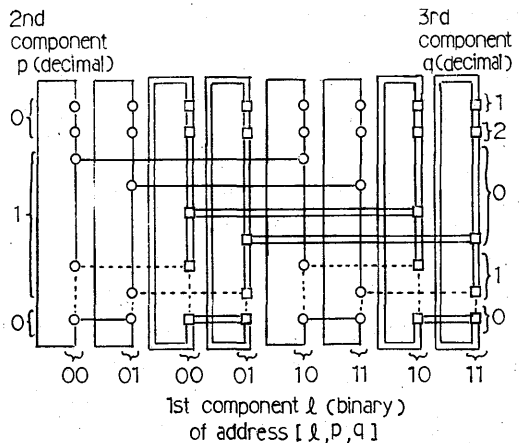
である。すなわち、 G_0 の p 次元が $\text{CCA}_{s-1, \langle u \rangle}$ の $r-1-p \pmod{s}$ 次元となる。図2の $\text{CCC}_{3,5}$ で $r=1$ のときのアドレスのつけかえの例を図5に示す。

(G_0 上での道の選び方)

このようにアドレスのつけかえを行なったとき、 G_0 の $V_{r,0}$ は $\text{CCA}_{s-1, \langle u \rangle}$ の端頂点集合 $T_{u_{s-2}}$ になる。 G_0 の V'_1 が $\text{CCA}_{s-1, \langle u \rangle}$ の $\bar{V}'_1$ になると仮定する。頂点集合 $\bar{V}'_1$ を、

$$\bar{V}'_1 = \begin{cases} T_{u_{s-2}-\bar{p}+r} & \text{場合(1), (2), (3)のとき} \\ T_{u_{s-2}-\bar{p}+r-1} & \text{場合(4)のとき} \end{cases}$$

と定義すると、 $\bar{V}'_1 \subseteq \bar{V}'_1$ 、 $|\bar{V}'_1| = |\bar{V}'_1|/2 = 2^{s-2}$ であ



○: nodes of $\text{CCA}_{2, \langle 2, 1 \rangle}$ derived from G_0 .

□: nodes of $\text{CCA}_{2, \langle 2, 1 \rangle}$ derived from G_1 .

図5 $\text{CCC}_{3,5}$ から得られる2つの $\text{CCA}_{2, \langle 2, 1 \rangle}$ s

Fig. 5-Two $\text{CCA}_{2, \langle 2, 1 \rangle}$ s derived from $\text{CCC}_{3,5}$.

る。従って、 $\bar{V}_1$ を正頂点集合、 $\bar{V}_1 - \bar{V}_1$ を負頂点集合とおくと、補題3より、 $\bar{V}_1$ と $\bar{V}_1 - \bar{V}_1$ の間に辺を共有しない1対1の道が存在する。 $\bar{V}_1$ の各頂点 v に対し、系列 v は $\bar{V}_1$ と $\bar{V}_1$ の間の道であるので、 $\bar{V}_1$ の各頂点 v' に対し、 v' と $\bar{V}_1$ の頂点との間の道が存在し、それら 2^{s-1} 個の道は互いに辺を共有しない。また、 $\bar{V}_1$ と $T_{u_{p-2}}$ の間には辺を共有しない1対1の道が存在する。

従って G_0 において、 $V_{r,0}$ の各頂点 v に対し、 v と V_1 の頂点との間の道が存在し、それら 2^{s-1} 個の道は互いに辺を共有しない。 G_1 においても同様に、 $V_{r,1}$ の各頂点 v' に対し、 v' と V_2 の頂点との間の道が存在し、それら 2^{s-1} 個の道は互いに辺を共有しない。従って V_1 と V_2 の間に互いに辺を共有しない 2^{s-1} 個の道が存在する。(補題2の証明終)

5. 超立方体グラフの最小2分割幅

s 次元超立方体グラフ $CUBE_s = (V, E)$ は、

$$V = \{[l] \mid 0 \leq l < 2^s\}$$

$$E = \{([l], [l + 2^p]) \mid 0 \leq l < 2^s, \text{bit}_p(l) = 0, 0 \leq p < s\}$$

である。 s 次元超立方体グラフの最小2分割幅は 2^{s-1} である。以下にその証明を記す。

[補題4] $MBW(CUBE_s) \leq 2^{s-1}$. $\square$

(証明) $CUBE_s = (V, E)$ とする。

$$V_1 = \{[l] \mid 0 \leq l < 2^{s-1}\}$$

$$V_2 = \{[l] \mid 2^{s-1} \leq l < 2^s\}$$

とすると (V_1, V_2) は $CUBE_s$ の2分割であり、

$$E(V_1, V_2) = \{([l], [l + 2^{s-1}]) \mid 0 \leq l < 2^{s-1}\}$$

となり、 $|E(V_1, V_2)| = 2^{s-1}$ である。従って、 $MBW(CUBE_s) \leq 2^{s-1}$ である。(証明終)

[補題5] $MBW(CUBE_s) \geq 2^{s-1}$. $\square$

(証明) $CUBE_s$ の任意の2分割 (V_1, V_2) に対して、 $CCC_{s,s} = (\bar{V}, \bar{E})$ の頂点集合 $\bar{V}$ の部分集合 $\bar{V}_1, \bar{V}_2$ を以下のように定める。

$$\bar{V}_i = \{[l, p] \in \bar{V} \mid [l] \in V_i\} \quad (i = 1, 2)$$

このとき、 $|\bar{V}_1| = |\bar{V}_2|$ 、 $\bar{V}_1 \cup \bar{V}_2 = \bar{V}$ 、 $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 = \emptyset$ となるので、 $(\bar{V}_1, \bar{V}_2)$ は $CCC_{s,s}$ の2分割である。いかなる l ($0 \leq l < 2^s$)に対しても、 $[l, p] \in \bar{V}_1$ かつ $[l, p'] \in \bar{V}_2$ ということはないので、 $E(\bar{V}_1, \bar{V}_2)$ には $CCC_{s,s}$ の環辺が含まれていない。

ある超立方体辺 $([l_1, p], [l_2, p])$ ($\text{bit}_p(l_1) = 0$ 、

$l_2 = l_1 + 2^p$)が $E(\bar{V}_1, \bar{V}_2)$ に含まれていると仮定する。 $[l_1, p] \in \bar{V}_1$ 、 $[l_2, p] \in \bar{V}_2$ ならば $[l_1] \in V_1$ 、 $[l_2] \in V_2$ なので $([l_1], [l_2]) \in E(V_1, V_2)$ が成立する。

$[l_1] \in V_2$ 、 $[l_2] \in V_1$ のときも同様に $([l_1], [l_2]) \in E(V_1, V_2)$ である。逆に、 $([l_1], [l_2]) \in E(V_1, V_2)$ が成立つときはある p ($0 \leq p < s$)が存在して、 $([l_1, p], [l_2, p]) \in E(\bar{V}_1, \bar{V}_2)$ が成立する。すなわち $E(V_1, V_2)$ の辺と $E(\bar{V}_1, \bar{V}_2)$ の辺は1対1に対応している。従って、 $|E(V_1, V_2)| = |E(\bar{V}_1, \bar{V}_2)|$ である。

定理1より、 $|E(\bar{V}_1, \bar{V}_2)| \geq 2^{s-1}$ である。従って、 $CUBE_s$ の任意の2分割 (V_1, V_2) に対して $|E(V_1, V_2)| \geq 2^{s-1}$ である。すなわち $MBW(CUBE_s) \geq 2^{s-1}$ である。(証明終)

補題4および5から、次の定理が成立する。

[定理2] $MBW(CUBE_s) = 2^{s-1}$. $\square$

6. む す び

本論文では、超立方体環グラフと超立方体グラフの最小2分割幅を求めた。他のよく用いられるグラフ(例えばシャフルエクステンジンググラフ⁽⁴⁾)に対する最小2分割幅を求める問題が残されている。

謝辞 本研究にあたり、有用な御助言を頂きました和田幸一博士、増澤利光氏、池田光二氏に感謝いたします。

文 献

- (1) Garey, M.R., Johnson, D.S. and Stockmeyer, L.: "Some Simplified Polynomial Complete Problems", SIGACT, pp.47-63 (1974).
- (2) Pease, M.C.: "The Indirect Binary n -cube Microprocessor Array", IEEE Trans. Comput., C-26, 5, pp.458-473 (May 1977).
- (3) Preparata, F.P. and Vuillemin, J.: "The Cube-Connected Cycles: A Versatile Network for Parallel Computation", Commun. ACM, 24, 5, pp.300-309 (May 1981).
- (4) Stone, H.S.: "Parallel Processing with the Perfect Shuffle", IEEE Trans. Comput., C-20, 2, pp.153-161 (Feb. 1971).
- (5) Thompson, C.D.: "Area-Time Complexity for VLSI", Proc. 11th Ann. ACM Symp. Theory of Computing, pp.81-88 (May 1979).

(昭和58年11月2日受付)