——論　文——

高信頼度二重化ネットワークの最適構成法

正　員　曽根岡昭直†　　正　員　真鍋　義文†
正　員　今瀬　　真†　　正　員　井上　正之††

The Optimum Design of Highly Reliable Duplex Networks

Terunao SONEOKA†, Yoshifumi MANABE†, Makoto IMASE† *and* Masayuki INOUE††, *Members*

あらまし　グラフ理論を用いて，高信頼度な網トポロジーのさまざまな構成法が検討されている．本論文では，ネットワークの二重化による高信頼化手法に対してグラフ論的基盤を与えることを目的に，次のことを示した．①二重化構造を持つネットワークをモデル化した二重化グラフを導入し，その信頼性を表す尺度としてクラスタ連結度を提案した．②クラスタ連結度が多項式オーダーの時間計算量で求められることを明らかにした．③クラスタ連結度の観点から，既存のネットワークを二重化して高信頼度な二重化ネットワークを構成する方法，すなわち連結度が次数に一致する正則グラフが与えられたとき，そのグラフの各点，各枝を二重化してクラスタ連結度最大の二重化グラフを構成する方法を明らかにした．

1. まえがき

計算機網，通信網等のネットワークの信頼性を評価したり，高信頼化手法を検討するのに，グラフによるモデル化がよく用いられる．信頼性の評価尺度として，連結度や，さまざまな観点から連結度を拡張した評価尺度が検討されてきた（例えば，文献(1)～(3)）．また，これらの概念に基づいて，高信頼度網トポロジーのさまざまな構成法が検討されてきた（例えば(1)，(3)，(4)）．

一方，現実のシステムでは，交換機や計算機内の装置の二重化[(5)]等，高信頼化手法として二重化の手法が用いられることが多い．更に，共通線信号網[(6)]等のネットワークにおいても，二重化の手法が近年頻繁に用いられだしてきている．しかしながら，このような二重化されたネットワークの信頼性を，トポロジーの面から検討した研究はほとんどない．

本論文では，ネットワークの二重化による高信頼化手法についてグラフ論的基盤を与えることを目的に，次の点を明らかにしている．**2.**では，二重化構造を持つネットワーク（二重化ネットワークと呼ぶ）をモデル化した二重化グラフを導入し，その信頼性を表す尺度としてクラスタ連結度を提案する．**3.**では，この尺度が多項式オーダーの時間計算量で求められることを示す．**4.**では，クラスタ連結度最大の二重化グラフを構成する問題について，(1)高信頼度な二重化ネットワークを新規に構成する立場と，(2)既存のネットワークを二重化して高信頼度な二重化ネットワークを構成する立場から整理する．**5.**では，(2)の立場で，連結度が次数と等しい正則グラフが与えられたとき，そのグラフの各点，各枝を二重化してクラスタ連結度最大の二重化グラフを構成する方法を明らかにする．

2. 二重化グラフとその信頼性の尺度

二重化ネットワークの例として，共通線信号網[(6)]（common channel signalling network）を考えてみる．共通線信号網は，交換機間の信号転送に用いられ，通信網の神経系に相当する．各エリア内の複数の交換機（信号端局（signal end point））は，A側とB側の二つの信号中継局（signal transfer point）に二重帰属し，信号中継局間は図1に示すようなさまざまな網トポロジーが考えられる．ここで，信号端局は信号の送信，受信のみを行い，信号の中継機能はない．

図1に示したどのトポロジーでも，二重化により一つの信号中継局の故障に対処でき，信号端局間の連結

† NTT電気通信研究所，武蔵野市
NTT Electrical Communications Laboratories, Musashino-shi, 180 Japan
†† 早稲田大学理工学部，東京都
School of Science and Engineering, Waseda University, Tokyo, 160 Japan

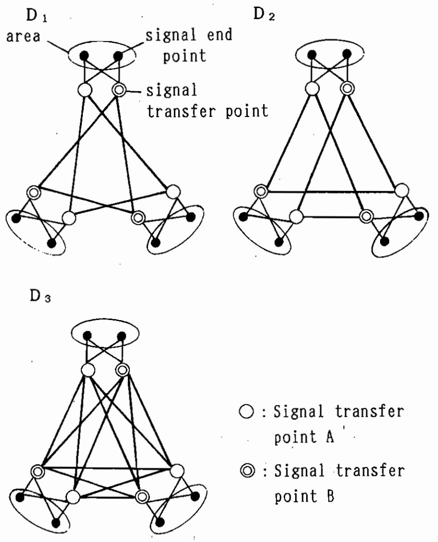


図１　共通線信号網トポロジー
Fig. 1 Common channel signalling network topology.

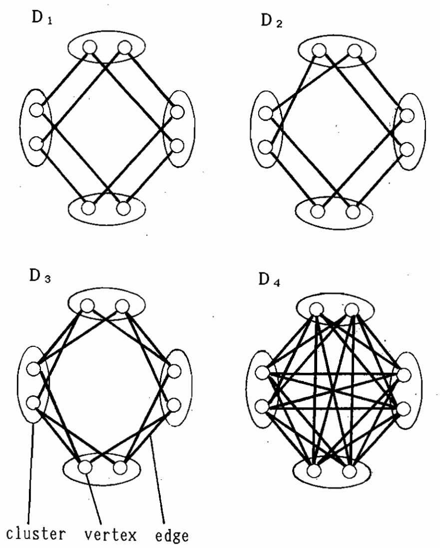


図２　二重化グラフの例
Fig. 2 Examples of duplex graph.

件（独立な道数）は等しく２である．しかしながら，D_1ではA側とB側で一局ずつ信号中継局が故障した場合に信号転送ができなくなるのに対し，D_2やD_3ではあるエリアを受け持つ二つの信号中継局が同時に故障した場合のみ信号転送ができなくなる．このように，二重化されたネットワークの信頼性は，その網トポロジーに依存するが，信号端局間の連結性では評価できない．

以下では，二重化ネットワークの信頼性をグラフ論的に明らかにするために，中継機能を有するノード間のトポロジーのみを考え，各エリアをクラスタに対応させた二重化グラフ（duplex graph）Dを導入し，その信頼性の尺度としてクラスタ連結度(cluster-connectivity)を提案する．

(1)　二重化グラフ

〔定義１〕　二重化グラフDは$D=(V,\ E,\ C)$で定義される．ここでVは点の集合，$C=\{c_1,\ c_2,\cdots,\ c_i,\cdots,\ c_n\}$は次の条件を満足するクラスタ(cluster)の集合である．

$$c_i \subseteq V,\ \ 1\leq|c_i|\leq 2\ \ (i=1,2,\cdots,\ n)$$

$$V=\bigcup_{i=1}^{n} c_i,\ c_i\cap c_j=\phi\ \ (i\neq j)$$

Eは，枝の集合である．但し，同一クラスタ内の２点間には枝は存在しないものとする．　■

また，Dにおいてクラスタを考慮しないグラフ$G^*=(V,\ E)$は単純かつ無向であるものとする．図２に二重化グラフの例を示す．

クラスタが一つしかない二重化グラフをトリビアルな二重化グラフ(trivial duplex graph)，異なるクラスタに属する任意の２点間に枝が存在する二重化グラフ（図２のD_4参照）を完全二重化グラフ(complete duplex graph）と呼ぶ．

(2)　クラスタ連結度

二重化グラフの信頼性の尺度を考えるために，二重化グラフ上のいくつかの用語を定義する．また，クラスタを考慮しないグラフ上で定義される用語は文献(7)に従う．

二重化グラフDにおける相異なる二つのクラスタc，c'間の道とは，ある$v\in c$，$v'\in c'$間の道である．二重化グラフがクラスタ連結であるとは，すべての相異なるクラスタ対間に道が存在することである．そうでないとき，クラスタ非連結であると言う．

相異なる二つの道が端点以外で同じ点を通らない（同じクラスタの異なる点を通っても良い）とき，それらは点独立であるという．また，相異なる二つの道が端クラスタ以外で同じクラスタ内の点を通らないとき，それらはクラスタ独立であるという．二重化グラフDにおいて，クラスタc，c'間の点独立な道の最大数を$\mathrm{pa}(c,\ c',\ D)$と書く．

二重化グラフDの独立道数$\beta(D)$を，

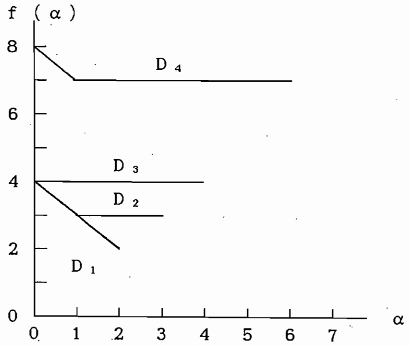


図3　クラスタ連結度関数
Fig. 3 Cluster-connectivity function.

$$\beta(D) = \min_{c,\, c' \in C(D)} \mathrm{pa}(c,\, c',\, D)$$

で定義する．

但し，$C(D)$はDのクラスタの集合を表し，Dがトリビアルな二重化グラフである場合の$\beta(D)$の値は，$|c|-1$（$|c|$はトリビアルな二重化グラフの点数）とする．

二重化グラフDおよび点集合$F \subset V$に対し，$D-F$はDからFの点とその点に接続されている枝を取り除いた二重化グラフとする．但し，クラスタ内の全ての点が除去されたときには，そのクラスタ自身も取り除くものとする．

二重化グラフの信頼性の尺度としてクラスタ連結度を次のように定義する．

〔定義2〕　二重化グラフDのクラスタ連結度$\kappa_c(D)$を次式で定義する．

$$\kappa_c(D) = \min_{\alpha} f(\alpha)$$

ここで，クラスタ連結度関数(cluster-connectivity function) $f(\alpha)$は，任意の除去点集合$F \subset V$に対して$D-F$がクラスタ非連結になるかトリビアルな二重化グラフになるときの除去点数以下のαに対して，次のように定義される．

$$f(\alpha) = \alpha + \min_{\substack{F \subset V \\ |F| = \alpha}} \beta(D-F)$$

また，$\kappa_c(D)$の値を実現する最小のαを$\alpha_{\min}(D)$とする．Dが明らかな場合は省略してκ_c，$\alpha_{\min}$と書く．　■

図2の二重化グラフに対するクラスタ連結度関数，クラスタ連結度の値を，それぞれ図3，表1に示す．

通常のグラフGにおいては，α個の点を除去したときに残った点間の最大独立道数の最小値をβとおくと，メンガーの定理[7]により，連結度$\kappa(G)$以下のαに対し$\alpha+\beta$の値は一定である．しかし，二重化グラフにおいては，除去点数と最大独立道数の最小値との和$f(\alpha)$は一定でないことがわかる．

表1　クラスタ連結度

D	$\kappa_c(D)$	$\alpha_{\min}$
D_1	2	2
D_2	3	1
D_3	4	0
D_4	7	1

同様にしてクラスタ枝連結度(cluster-edge-connectivity)も定義できるが，クラスタ枝連結度の値は二重化グラフにおいてクラスタ内の2点を1点に縮約した多重グラフの枝連結度に一致する．以下ではクラスタ連結度のみを扱う．

3. クラスタ連結度の時間計算量

本章では，クラスタ連結度を求めるための時間計算量を評価する．

まず，そのために，クラスタ連結度の値を与える除去点集合の性質について明らかにする．

〔性質1〕　Dの相異なる二つのクラスタc，c'および$F \cap (c \cup c') = \phi$を満たす任意の点集合$F$に対して，

$$\mathrm{pa}(c,\, c',\, D) - \mathrm{pa}(c,\, c',\, D-F) \leqq |F|$$

が成立する．　■

（証明）　Dにおけるc，c'間の独立な道のうちで，Fの点を通るのは高々$|F|$個である．従って，$D-F$における独立な道の数はDに比べて高々$|F|$個しか減少しない．　■

〔性質2〕　二重化グラフDに対して次式が成立する．

$$0 \leqq \alpha_{\min} \leqq 2 \qquad ■$$

（証明）　$\alpha_{\min} \geqq 3$と仮定する．$i = \alpha_{\min} - 1\ (\geqq 2)$とおく．

$$f(i+1) = f(\alpha_{\min}) = i + 1 + \beta(D-F)$$

とする．但し，Fは$f(\alpha_{\min})$を実現するための除去点集合である．また，$\alpha_{\min}$の定義より，

$$f(i) > f(i+1) \tag{1}$$

である．

$D-F$ がトリビアルな二重化グラフである場合，ある $v\in F$ が存在し，除去点集合として $F-\{v\}$ を選ぶと，$\beta(D-F+\{v\})\leqq|c|$（但し $|c|$ はトリビアルな二重化グラフの点数）である．

よって，

$f(i)\leqq i+\beta(D-F+\{v\})\leqq i+|c|=f(i+1)$

となり，式(1)に反する．

それ以外の場合，$D-F$ において，$\beta(D-F)$ 本の独立な道がある二つの端クラスタ c，c' が存在する．$|F|\geqq 3$，および $D-F$ のクラスタでその中の二つの点が同時に除去されていることがないから，ある $v\in F$ で $v\notin c\cup c'$ であるものが存在する．このとき除去点集合として $F-\{v\}$ を選ぶと，性質1より

$\beta(D-F+\{v\})\leqq\beta(D-F)+1$

であり，よって

$$f(i)\leqq i+\beta(D-F+\{v\})\leqq i+\beta(D-F)+1 = f(i+1)$$

となり，式(1)に反する． ■

〔性質3〕 $\alpha_{\min}>0$ のとき，$F\subset(c\cup c')$ であるような，κ_c の値を与える大きさ $\alpha_{\min}$ の除去点集合 F，端クラスタ対 c，c' が存在する． ■

（証明） 全ての F，c，c' に対して，$F\not\subset(c\cup c')$ であると仮定する．このとき $v\notin(c\cup c')$ を満足する $v\in F$ が存在する．除去点集合として $F-\{v\}$ を選ぶと性質1より，

$\beta(D-F+\{v\})\leqq\beta(D-F)+1$

であり，性質2の証明と同様の議論により，

$f(\alpha_{\min}-1)\leqq f(\alpha_{\min})$

となり，$\alpha_{\min}$ の定義に反する． ■

これらの性質から，クラスタ連結度を求めるための時間計算量について次のことがわかる．

〔定理1〕 二重化グラフのクラスタ連結度は，多項式オーダーの時間計算量で求めることができる． ■

（証明） クラスタの数を $|c|=n$ とする．ある二つのクラスタ間の独立な道の最大本数を求めるには，最大フローを求めるアルゴリズムを適用すればよい[9]．そこで，ある二つのクラスタ間の独立な道の最大本数を求めるための手続きを P とし，クラスタ連結度を求めるために P を何回呼び出すかを考える．性質2より，除去点の数 α が2までの場合について求めれば十分である．また，性質3より，除去点の存在するクラスタ間の独立な道の数のみを求めればよい．

①$\alpha=0$：2つの端クラスタの選び方が $n(n-1)/2$ であるので，P をこの回数だけ呼び出せばよい．

②$\alpha=1$：除去点の選び方が最大 $2n$ 通り，それぞれに対してもう一方の端クラスタの選び方が $n-1$ 通り，従って最大 $2n(n-1)$ 回，P を呼べばよい．

③ $\alpha=2$：2つの端クラスタの選び方は $n(n-1)/2$ 通り，除去点の選び方は最大4通り（同一端クラスタからは2点は選べないことに注意），従って最大 $2n(n-1)$ 回 P を呼べばよい．

以上より，全体で最大 $4.5n(n-1)$ 回，手続き P を呼ぶことによりクラスタ連結度を求めることができる．手続き P 自体は多項式のオーダーである[9]ので，クラスタ連結度も多項式のオーダーで求められる． ■

4. クラスタ連結度最大の二重化グラフの構成問題

二重化により，高信頼度なネットワークを構成することは重要な課題である．ここでは，新規にネットワークを構成する（砂漠論的構成の）立場と，既存のネットワークを陽に意識する立場から，クラスタ連結度最大の二重化グラフを構成する問題について論じる．

4.1 新規に二重化グラフを構成する問題

新規にネットワークを構成する立場では，次の問題が考えられる．

〔問題1〕 各クラスタが2点からなる，クラスタ数 n，枝数 m の二重化グラフのうち，クラスタ連結度最大のものを構成せよ． ■

この問題の条件のもとで，クラスタ連結度の上界は次で与えられる．

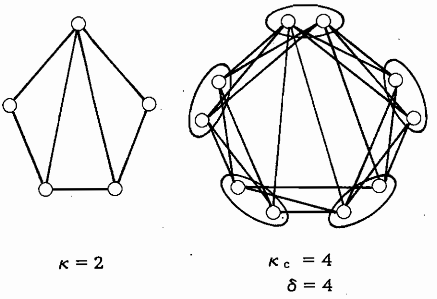
〔性質4〕 各クラスタが2点からなる二重化グラフにおいて，クラスタ数を n，枝数を m，点の最小次数を δ とすると，

$$\kappa_c\leqq\delta+1\leqq\lfloor m/n\rfloor+1 \tag{2}$$

である．但し，$\lfloor x\rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す． ■

（証明） $\delta\leqq\lfloor m/n\rfloor$ であることは明らかなので，$\kappa_c\leqq\delta+1$ であることを示せば十分である．κ_c の定義より，$\kappa_c\leqq f(1)$ である．次数が δ のある点を v，v を含むクラスタを $c=\{v, v'\}$ とする．$F=\{v'\}$ とすると，c と他のクラスタとの間の独立な道の数は高々 δ である．よって，$f(1)\leqq\delta+1$ であり，性質4が成立する． ■

m が n の倍数（m/n を d とおく）の場合，問題1に対して次のことが文献(8)で明らかにされている．「ク



(a) given graph G_0　(b) induced duplex graph of G_0

図4　誘導二重化グラフ
Fig. 4　Induced duplex graph.

ラスタ数nが奇数で，$d=2n-3$の場合には，$\kappa_c(D)=d+1$を満足する二重化グラフDは存在しない．この場合を例外として除けば，$\kappa_c(D)=d+1$を満足する二重化グラフDを構成できる」．

4.2　与えられたグラフを二重化する問題

既存のネットワークを陽に意識する立場から，与えられたグラフを二重化してクラスタ連結度最大の二重化グラフを構成する問題を考える．

グラフG_0が与えられたとき，G_0の点を2点からなるクラスタに1対1に対応させ，G_0の枝の端点に対応するクラスタ間以外には枝を付加しない二重化グラフを，G_0の誘導二重化グラフ（induced duplex graph）$D(G_0)$と呼ぶ．図4に誘導二重化グラフの例を示す．

連結度dのグラフG_0が与えられたとき，その誘導二重化グラフのクラスタ連結度の上界は次で与えられる．

〔性質5〕　連結度d，点数nのグラフG_0が与えられたとき，クラスタ数n，枝数mである誘導二重化グラフ$D(G_0)$のクラスタ連結度は次式を満たす．

$$\kappa_c(D)\leqq\begin{cases}\min\{2d,\ \lfloor m/n\rfloor+1\} & (d<n-1\text{のとき})\\ \lfloor m/n\rfloor+1 & (d=n-1\text{のとき})\end{cases}$$

■

（証明）　性質4より$\kappa_c\leqq\lfloor m/n\rfloor+1$が成立するのは明らかなので，$\kappa_c\leqq 2d$（$d<n-1$のとき）であることを示せば十分である．$\kappa_c$の定義より$\kappa_c\leqq f(0)$である．$G_0$が連結度$d$より，クラスタ独立な道の数が$d$本である隣接しない二つの端クラスタが存在する．各クラスタは2点からなるから，その二つのクラスタ間の点独立な道は$2d$本以下である．よって，$\kappa_c\leqq 2d$であり，性質5が成立する．　■

図4に示した誘導二重化グラフは，クラスタ連結度が$2d$となる場合の例である．

誘導二重化グラフのなかでも，枝の付け方に対して次の二つの考え方がある．

(1)　誘導二重化グラフ$D(G_0)$の総枝数だけが決められている．

(2)　枝も二重化する．すなわち，G_0のある2点間に枝があれば，Dの対応するクラスタ間に，必ず2本の枝を付け加える．

(1)の立場では，次のような問題となる．

〔問題2〕　点数nのグラフG_0が与えられたときに，そのグラフの各点を二重化して，クラスタ数n，枝数mで，クラスタ連結度最大の誘導二重化グラフ$D(G_0)$を構成せよ．　■

この問題の条件のもとでのクラスタ連結度の上界は前述の性質5で与えられる．

一方，(2)の立場では，次のような問題となる．

〔問題3〕　点数nのグラフG_0が与えられたときに，そのグラフの各点と各枝を二重化して，クラスタ数nで，クラスタ連結度最大の誘導二重化グラフ$D(G_0)$を構成せよ．　■

この問題の条件のもとでは，二重化グラフ$D(G_0)$の枝の付け方を考えれば，$D(G_0)$の点の最小次数δ'は$\delta'\leqq\delta$を満たすから，クラスタ連結度の上界は次で与えられる．

〔性質6〕　連結度d，点数n，最小次数δのグラフG_0が与えられたとき，クラスタ数nである誘導二重化グラフ$D(G_0)$のクラスタ連結度は次式を満たす．

$\kappa_c(D)\leqq\min\{2d,\ \delta+1\}$　■

次の章では(2)の立場で問題3について検討する．

5. クラスタ連結度最大の誘導二重化グラフの構成法

この章では，与えられたグラフG_0の連結度がその次数と等しい正則グラフの場合[†]には，問題3が解けることを示す．

次のような誘導二重化グラフの構成法を考える．まず，グラフG_0の各点を，二重化グラフDにおいては，ラベルa，bのついた点対で構成されるクラスタに変換する．次に，G_0のある2点間に枝があれば，Dの対応するクラスタ間の2本の枝に変換する．ここで，枝の変換の仕方には，次の2通りの場合のみを考えればよい．一つは，図5(b)に示すように，同じラベルを持

† 応用を考えると，信頼性の高いグラフが与えられると考えられる．連結度dが次数に一致する正則グラフのクラスは，連結度dを与えて枝数最小のグラフであり，信頼性の高いグラフのクラスである．

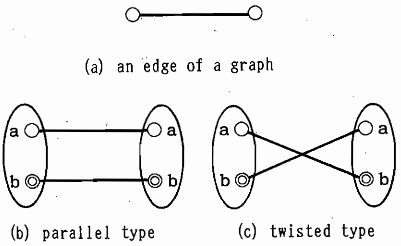


図5　枝の変換の二つの型
Fig. 5　Two types of transformation of an edge.

つ点同士を結ぶような2本の枝とした平行型(parallel type)であり，もう一方は図5(c)に示すように，異なったラベルを持つ点同士を結ぶ2本の枝としたねじり型(twisted type)である．それ以外の枝の変換は考えない．

このようなG_0からDへの変換において，G_0のq本の枝をねじり型で変換し，それ以外の全ての枝を平行型で変換したG_0の誘導二重化グラフを，q－誘導二重化グラフ$D_q(G_0)$と呼ぶ．

与えられたグラフG_0の連結度がその次数に等しい正則グラフの場合には，次の問題が解ければ問題3の解を得ることができる．

〔問題3′〕 連結度d，点数nのグラフG_0が与えられたとき，そのグラフの各点，各枝を二重化して，クラスタ数nで，$(d+1)$－クラスタ連結な誘導二重化グラフ$D(G_0)$を構成せよ．　■

次の手続で問題3′の解を得ることができることを定理2で示す．

〔手続〕

1) 与えられたd－連結グラフG_0において，G_0-E_qの連結度$\kappa(G_0-E_q)$が$\kappa(G_0-E_q)\geqq d-1$かつ

$$|E_q|=\begin{cases} d-1 & d=1,2 \\ \lceil (d+1)/2 \rceil & d\geqq 3 \end{cases}$$

を満たすマッチングE_qを見出す．

但し，マッチングとは，枝の部分集合で，その中のどの2本の枝も隣接していないようなものである．また$\lceil x \rceil$はxより小さくない最小の整数を表す．

2) E_qに含まれる枝をねじり型で，それ以外の枝を平行型で変換し，G_0のq－誘導二重化グラフ$D_q(G_0)$を構成する．　■

図6に，この手続で二重化グラフを構成する例を示した．

〔定理2〕 d－連結グラフG_0が与えられたとき，

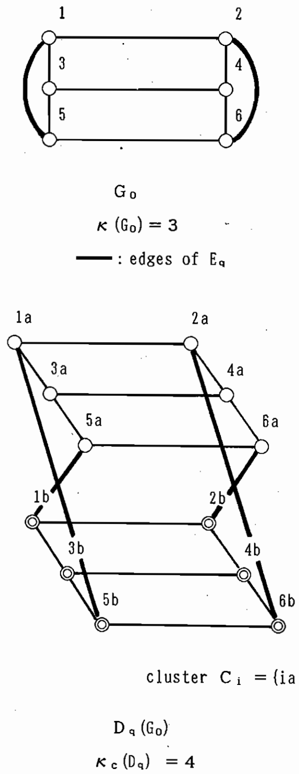


図6　クラスタ連結度最大の二重化グラフ構成手続の適用例
Fig. 6　An example of construction procedure of maximally cluster-connected duplex graph.

G_0に$\kappa(G_0-E_q)\geqq d-1$でかつ

$$q=\begin{cases} d-1 & d=1,2 \\ \lceil (d+1)/2 \rceil & d\geqq 3 \end{cases}$$

を満たすq本のマッチングE_qがあれば，E_qに含まれるq本の枝をねじり型で変換したG_0の誘導二重化グラフ$D_q(G_0)$は$(d+1)$－クラスタ連結になる．■

（証明） 除去点集合Fは，性質2より$0\leqq|F|=\alpha\leqq 2$を考えればよい．更に，同一クラスタ内の2点が同時に除去される場合はそのクラスタも除去されるので，同一クラスタ内の2点からなる除去点集合Fは考えなくても良い．性質3より，独立道数を数えるクラスタ対c_1，c_2は，$F\subset(c_1\cup c_2)$を満たすものを考えれば良い．

①$\alpha=0$のとき

グラフG_0の各枝に対して，二重化グラフ$D_q(G_0)$には隣接するクラスタ間に端点を共有しない2本の枝

があるので，G_0 の点間の1本の道に対応して，$D_q(G_0)$ のクラスタ間に2本の点独立な道がある．G_0 が d－連結であることより，$D_q(G_0)$ の任意のクラスタ間に d 本のクラスタ独立な道があり，従って $2d$ 本の点独立な道がある．

②$\alpha=1$ のとき

$\alpha=0$ のときと同様にして，二重化グラフ $D_q(G_0)$ において，除去点を含むクラスタ c' とそれに隣接するクラスタ間には1本の枝があるから，G_0 の点間の道に対応して $D_q(G_0)$ のクラスタ間には少なくとも1本の道がある．従って，G_0 が d－連結であるから，$D_q(G_0)$ の任意のクラスタ間に少なくとも d 本の点独立な道がある．

③$\alpha=2$ のとき

$d=1$ のときは考える必要がないので，$d\geqq 2$ とする．$D_q(G_0)$ は G_0-E_q と同型な二つのグラフ $G_a=(V_a, E_a)$，$G_b=(V_b, E_b)$ と G_0 のマッチング E_q に含まれる枝をねじり型で変換した $2q$ 本の枝 E_t から構成される．ここで，$D_q(G_0)$ でクラスタを考えないグラフを $G^*=(V_a+V_b, E_a+E_b+E_t)$ と記し，ねじり型の枝 E_t の端点の集合を $W_a\subseteq V_a$，$W_b\subseteq V_b$ $(|W_a|=|W_b|=2q)$ と記す．いま，独立な道を数えるクラスタ対 c_1，c_2 を $c_1=(u_a, u_b)$，$c_2=(v_a, v_b)$ とおく．但し，$u_a, v_a\in V_a$，$u_b, v_b\in V_b$ である．

一般性を失うことなく，次の二つの除去点集合 F の場合を考える．

(1) $F=\{u_b, v_b\}$ の場合

G_a が $(d-1)$－連結より，u_a，v_a 間には $(d-1)$ 本の独立道がある．

(2) $F=\{u_b, v_a\}$ の場合

(2－1) $d\geqq 3$ の場合

点間の独立道についてはメンガーの定理が成立するから，F，u_a，v_b 以外の任意の $d-2$ 点からなる点集合 $H=H_a+H_b$ $(H_a\subset V_a, H_b\subset V_b)$ をグラフ G^* から除去したときに，点 $u_a\in c_1$，$v_b\in c_2$ 間に道があることを，次の二つの場合に分けて示す．

(a) $|H_a|=d-2$，$|H_b|=0$ の場合
($|H_a|=0$，$|H_b|=d-2$ も同様)

$u_a\in W_a$ のときは明らかに u_a-v_b 間に道があるので，$u_a\notin W_a$ の場合を考える．

もとの d－連結なグラフ G_0 と同型な G_a+E_q において $d-1$ 個の点集合 $\{v_a\}+H_a$ を除去したグラフ $G_a+E_q-\{v_a\}-H_a$ は連結であるから，u_a から任意の $w_a\in W_a-H_a-\{v_a\}(\neq\phi)$ への道がある．$G_a-\{v_a\}-H_a$ は，更に W_a の点間の q 本の枝 E_q を除去したグラフであるから，u_a からある $w_a(\in W_a-H_a-\{v_a\})$ への道がある．

一方，G_b が $(d-1)$－連結であり，$H_b=\phi$ であることから，$G_b-\{u_b\}-H_b$ において，任意の $w_b\in W_b-H_b-\{u_b\}$ から v_b への道が存在する．また，$u_a\notin W_a$ より，$W_b-H_b-\{u_b\}=W_b$ となり，w_a を端点とするねじり枝 (w_a, w_b) は存在する．以上より，G^*-F-H において $u_a-w_a-w_b-v_b$ という道が存在する．

(b) $1\leqq|H_a|, |H_b|\leqq d-3$，$|H_a|+|H_b|=d-2$ の場合

$u_a\in W_a$ または $v_b\in W_b$ のときは明らかに u_a-v_b 間に道があるので，$u_a\notin W_a$ かつ $v_b\notin W_b$ の場合を考える．

$|E_t|=2q\geqq d+1$，$|F\cup H|\leqq d$ より，G^*-F-H において E_t に含まれる枝は少なくとも1本は存在する．それを $e_t=(w_a, w_b)$ とする．$|H_a\cup\{v_a\}|, |H_b\cup\{u_b\}|\leqq d-2$ と G_a，G_b が $(d-1)$－連結より，G^*-F-H において $u_a-w_a-w_b-v_b$ と道が存在する．

(2－2) $d=2$ の場合

$H=\phi$ であり，G^*-F において u_a-v_b 間に道があることを示せばよい．

$u_a\in W_a$ または $v_b\in W_b$ のときは明らかに u_a-v_b 間に道があるので，$u_a\notin W_a$ かつ $v_b\notin W_b$ の場合を考える．

$q=1$ であり，ねじり枝を $e_t=\{(w'_a, w_b), (w_a, w'_b)\}$ とおく．但し，$W_a=\{w_a, w'_a\}\subset V_a$，$W_b=\{w_b, w'_b\}\subset V_b$ である．(2－1)(a)の議論と同様にして，$G_a-\{V_a\}$ (および $G_b-\{u_b\}$)において，u_a から W_a (v_b から W_b) に含まれるどちらかの点へは道がある．いま，$G_a-\{v_a\}$ において一般性を失うことなく u_a から道がある W_a の点を w_a とする．

(a) $G_b-\{u_b\}$ において w'_b から v_b へ道があれば，G^*-F において，$u_a-w_a-w'_b-v_b$ と道がある．

(b) $G_b-\{u_b\}$ において w'_b から v_b へ道がないとすると，G_b が連結であることから，G_b においては w'_b と v_b 間には u_b を経由する道がある．このことと G_a と G_b が同型であることから，$G_a-\{v_a\}$ において u_a から w'_a への道がある．また，$G_b-\{u_b\}$ において，v_b から W_b のどちらかの点へは道があることから，w_b から v_b への道がある．従って，G^*-F において，$u_a-w'_a-w_b-v_b$ と道がある． ■

それでは，前述の条件を満たす q 本のマッチング E_q はどのように選べばよいだろうか．$d=1$ のとき $q=$

0である．$d=2$のとき$q=1$であるから，任意の枝を除去すればよい．

ここでは，$d=3$，または$d \geqq 4$で$n \geqq 2d-1$（d：奇数），$n \geqq 2d+2$（d：偶数）のd－正則グラフの場合には，次のアルゴリズムで上述のマッチングE_qを得ることができることを示す．

〔アルゴリズム〕

入力：d－連結なd－正則グラフ$G_0=(V_0, E_0)(d \geqq 3)$

```
p := 0 ; E_q := φ ;  V' := V_0 ;
while (p < ⌈(d+1)/2⌉) do
  begin
    if ∃(x, y) ∈ E_0
    such that κ(x, y) ≧ d ∧ x, y ∈ V' then
      begin
        G_0 := G_0 − (x, y) ;  E_q := E_q + (x, y) ;
        p := p + 1 ;  V' := V' − {x, y} ;
      end
  end
```

但し，局所連結度（local connectivity）$\kappa(x, y)$はx，y間の点独立な道の数である．■

このアルゴリズムが停止すれば，このE_qが前述の条件を満たすマッチングであることは明らかである．一方，途中でG_0が極小$(d-1)$－連結グラフになったとすると，無限ループに入る．ここで，極小k－連結グラフ（minimally k－connected graph）とは，k－連結であるが，どの枝を除去しても，もはやk－連結でないグラフのことである．

定理3では，このアルゴリズムで上述のマッチングE_qを得ることができることを保証する．

極小k－連結グラフに関し次の性質が成立する．

〔性質7〕[10] Gが極小k－連結グラフであることの必要十分条件は，Gの全ての隣接点間に対し$\kappa(x, y)=k$であることである．■

〔性質8〕[10] 点数nの極小2－連結グラフは少なくとも$\lceil (n+4)/3 \rceil$個の次数2の点を持つ．■

〔性質9〕[10] 点数nの極小k－連結グラフは，少なくとも$\lceil ((k-1)n+2)/(2k-1) \rceil$個の次数$k$の点を持つ．■

性質7～9より，次の定理を得る．

〔定理3〕 与えられたd－連結なd－正則グラフG_0の点数nが以下の条件を満たす場合には，上述のアルゴリズムにより，$\kappa(G_0-E_q) \geqq d-1$を保証したままで，$\lceil (d+1)/2 \rceil$（但し$d \geqq 3$）本のマッチング$E_q$を除去できる．

$$n \geqq 4 \qquad d=3 \text{のとき}$$

$$n \geqq \begin{cases} 2d-1 & d \geqq 4,\ d\text{：奇数のとき} \\ 2d+2 & d \geqq 4,\ d\text{：偶数のとき} \end{cases}$$ ■

（証明） $d \geqq 4$のとき，性質9より，d－連結グラフG_0の極小$(d-1)$－連結部分グラフにおいて，次数$(d-1)$の点の点数n_{d-1}は

$$n_{d-1} \geqq \left\lceil \frac{(d-2)n+2}{2d-3} \right\rceil$$

である．G_0の各点の次数がdであるから，G_0から$\lceil n_{d-1}/2 \rceil$より少ない本数のマッチングを除去したとしても，極小$(d-1)$－連結グラフとはならず，性質7より$\kappa(x, y) \geqq d$なるマッチング$(x, y) \in E_0$が存在する．また，性質7より，$(d-1)$－連結グラフGにおいて，$\kappa(x, y) \geqq d$なる隣接点x，yがあれば，x，y間の枝(x, y)を除去したグラフ$G_{xy}=G-(x, y)$も$(d-1)$－連結であることがわかる．

従って，前述のアルゴリズムで，G_0から少なくとも

$$\left\lceil \frac{n_{d-1}}{2} \right\rceil \geqq \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{(d-2)n+2}{2d-3} \right\rceil}{2} \right\rceil$$

本のマッチングを，$(d-1)$－連結を保証したまま除去できる．

よって

$$n \geqq \begin{cases} 2d-1 & (d \geqq 4,\ d\text{：奇数のとき}) \\ 2d+2 & (d \geqq 4,\ d\text{：偶数のとき}) \end{cases}$$

であれば$\lceil (d+1)/2 \rceil$本のマッチングを除去できる．

$d=3$のとき，性質8より同様にして，$n \geqq 5$であれば2本のマッチングを除去できることが示せる．$n=4$の場合，グラフG_0が完全グラフK_4であるから，明らかに2－連結を保証したまま2本のマッチングを除去できる．■

定理2，3から，$d=3$，または$d \geqq 4$で$n \geqq 2d-1$（d：奇数），$n \geqq 2d+2$（d：偶数）のd－正則グラフの場合に，前述の手続で問題3′の解を得ることができることがわかる．

6. む す び

本論文では，二重化構造を持つネットワークのグラフ論的モデルとして二重化グラフを提案し，その信頼性の尺度としてクラスタ連結度を提案した．このクラスタ連結度が多項式オーダーの時間計算量で求められることを明らかにした．また，連結度が次数に一致する正則グラフが与えられたときに，そのグラフの各点，

各枝を二重化して，クラスタ連結度最大の二重化グラフを構成するアルゴリズムを示した．

また，与えられたグラフが，連結度と次数が一致する正則グラフでない場合での問題3，および枝の付け方に対して総枝数のみが規定された形の問題2の解となる二重化グラフの構成法が今後の検討課題として残されている．

謝辞　本研究のきっかけを与えて頂いたＮＴＴ通信網第一研究所交換トラヒック研究室能条主任研究員，ならびに研究遂行にあたり御指導，御討論頂いた早稲田大学堀内教授，ＮＴＴ基礎研究所第五研究室岡田室長，東工大梶谷教授，上野助手に深謝します．

文　　献

(1) R.S.Wilkov："Analysis and design of reliable computer networks", IEEE Trans. Commun., COM-20, pp.660-678 (1972).
(2) G.Exoo："On a measure of communication network vulnerability", Networks, 12, pp.405-409 (1982).
(3) A.M.Farley："Networks immune to isolated failures", Networks, 11, pp.255-268 (1981).
(4) M.Imase, T.Soneoka and K.Okada："Connectivity of regular directed graphs with small diameters", IEEE Trans. Comput., C-34, 3, pp.267-273 (1985).
(5) 秋山　稔："近代通信交換工学", pp.458-459 電気書院(昭48).
(6) R.A.Skoog, H.Ahmadi and S.M.Boyles："Network architecture planning for common channel signalling networks", Networks 83, pp.266-269 (1983).
(7) F.Harary："Graph Theory", Addison-Wesley (1969).
(8) 曽根岡，井上，真鍋，今瀬："二重化構造を持つトポロジーの信頼性"，信学技報，CAS85-92 (1985).
(9) A.H.Esfahanian and S.L.Hakimi："On computing the connectivities of graphs and digraphs", Networks, 14, pp.355-366 (1984).
(10) B.Bollobas："Extremal Graph Theory", pp.11-29, Academic Press Inc. Ltd., London (1978).

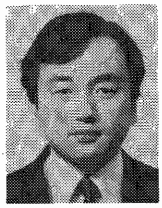
（昭和61年6月30日受付）

曽根岡昭直

昭55東大・工・電子卒．昭57同大学院修士課程了．同年電電公社（現，ＮＴＴ）武蔵野電気通信研究所入所．以来，通信網設計，グラフ理論の研究に従事．現在，ＮＴＴ基礎研究所情報通信基礎研究部第五研究室研究主任．IEEE会員．

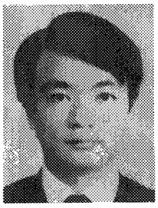
真鍋　義文

昭58阪大・基礎工・情報卒．昭60同大学院修士課程了．同年ＮＴＴ武蔵野電気通信研究所入所．以来，グラフ理論，通信網信頼性の研究に従事．現在，ＮＴＴ基礎研究所情報通信基礎研究部第五研究室勤務．情報処理学会会員．



今瀬　　真

昭50阪大・基礎工・情報卒．昭52同大学院修士課程了．同年電電公社（現，ＮＴＴ）武蔵野電気通信研究所入所．以来，分散制御交換機，通信網設計，グラフ理論の研究に従事．現在，ＮＴＴ基礎研究所情報通信基礎研究部第五研究室主任研究員．59年度学術奨励賞受賞．IEEE会員．



井上　正之

昭57早大・理工・電子通信卒．昭59同大学院博士前期課程了．現在，同後期課程在学中．昭61同大助手，現在に至る．グラフ理論・マトロイド理論とその応用に関する研究に従事．